

## Produktivt matematiskt tänkande

Varför bör man uppmuntra produktivt matematiskt tänkande och resonemang och hur gör man det? Den här artikel för fram flera goda argument och framhåller vikten av pedagogisk variation. Jo Boaler från Stanford University var en av huvudtalarna på Matematikbiennalen 2026 i Göteborg.

Jag har ägnat mitt yrkesliv åt att studera matematiklärande och åt att själv undervisa i matematik i såväl grund- och gymnasieskola som på universitet. Trender kommer och går när det gäller undervisningsmetoder, men det finns också redan välkänd kunskap om effektiva undervisnings- och inlärningsmetoder som är viktiga att lyfta fram.

Elever kan lära sig matematik på olika sätt – ibland av en lärare som presenterar en idé på tavlan, ibland genom att själv sitta och tänka igenom ett problem, och ibland genom att arbeta i par eller grupper, resonera och lösa problem tillsammans. En matematikdidaktisk debatt med argument för att all undervisning bör vara "traditionell" eller att man alltid ska ägna sig åt "grupparbete" blir urvattnad och ointressant. Olika pedagogiska strukturer erbjuder olika typer av lärandemöjligheter och eleverna behöver dem allihop. Nyligen framförda argument från vissa specialpedagoger om att elever med inlärningssvårigheter endast gynnas av explicit undervisning är olyckliga och härrör från forskningens snävhet. Elever med funktionsnedsättningar eller matematiksvårigheter har ett brett spektrum av förmågor och behov, och gynnas, precis som alla andra elever, av många olika arbetssätt.

Policydokument som ställer procedurkompetens mot begrepps-förståelse är lika vilseledande eftersom det skapar en falsk dikotomi. Både procedurer och begrepp är viktiga och utvecklas bäst i samspel. Procedurer är inte till någon nytta om inte elever kan använda och tillämpa dem, vilket kräver begrepps-förståelse. Och när elever utvecklar begrepps-förståelse lär de sig också att förstå och använda matematiska procedurer.

Elevers egna idéer utgör lärarens mest användbara resurs i undervisningen, men teknik kan också vara ett stöd för att skapa förundran och få elever att se skönheten i matematik, speciellt med hjälp av animationer och rörelse. Bra matematikproblem varierar också till sin natur – vissa är vardagsnära eller baserade på fakta från omvärlden, andra utgörs av äkta matematiska mönster som kan skapa spänning och fascination. Goda matematiklärare vet att det är viktigt att eleverna engageras i matematik på olika sätt och med olika typer av frågor och uppgifter, och utgår därför från en variation av pedagogiska

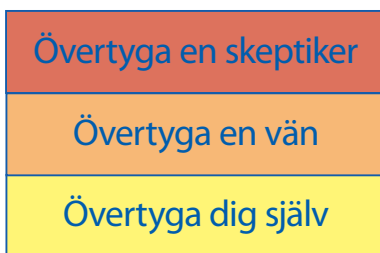


strukturer. Detta utgör en viktig del av lärarens autonomi eftersom lärarna själva vet vilka undervisningsmetoder som är bäst för deras elever och när de ska använda dem.

Även om alla olika undervisningsmetoder och matematiska problem kan vara effektiva, är vår strävan alltid att utveckla förståelse. Matematisk förståelse innebär inte att lära sig att följa stegen i ett problem, det innebär att tränga på djupet i de begrepp och matematiska idéer som tas upp, att se mönster och att göra kopplingar. Möjligen är samarbete den viktigaste resursen för att utveckla denna matematiska förståelse, eftersom elever genom samarbete kan dela sina tankar och skapa kopplingar mellan varandras idéer.

## Samarbete och matematik

Samarbete är avgörande för matematiklärande, vilket är ironiskt med tanke på att matematikundervisning ofta handlar om att sitta enskilt och räkna. En av anledningarna till att samarbete är viktigt är att *resonemang är själva kärnan i matematik*. När matematiker publicerar artiklar är de fyllda av matematiska resonemang. Ett av de enklaste sätten att uppmuntra resonemang är att helt enkelt fråga eleverna – varför tror du att det fungerar? och låt dem dela med sig av sina matematiska argument. Att använda sig av en skeptikers ramverk – att fråga hur man övertygar en skeptiker, och att be någon att vara skeptisk – utvecklar och fördjupar ofta människors matematiska resonemang. Det är svårt för elever att resonera och att koppla samman matematiska idéer när de arbetar enskilt.



*En skeptikers ramverk*

Tyvärr är det sällan matteböcker uppmuntrar resonemang. Ofta söks bara svaret på korta frågor. Elever ombeds att "lösa", "fylla i" eller "komplettera". De får sällan frågor som: Hur skulle du ta dig an problemet? Hur skulle du kunna visualisera det? eller Hur kan du bevisa det? Inte heller ombeds eleverna att förklara sitt resonemang. Oftast arbetar de enskilt med att under tystnad besvara korta frågor, utan möjligheter till samarbete eller djupt tänkande.

För fyrtio år sedan var datoranvändning den aspekt av matematik som arbetsgivare värderade högst. Det har nu sjunkit till botten av deras lista, och istället är *samarbete* den matematiska förmåga som sätts främst, enligt en undersökning gjord av STEM Women. Conrad Wolram är en matematiker som har hjälpt till att skapa Wolram-Alpha (som driver Siri och Alexa) och en rad andra utbildningsmaterial. I ett samtal med Conrad berättade han att han bara vill anställa personer som kan kommunicera matematiska idéer, eftersom det är vad som driver innovation, och det är det enda sättet felaktigt tänkande kan upptäckas.

## Stå vid tavlor eller sitta vid bord?

Genom hela min karriär har jag studerat och undervisat om matematiskt samarbete i klassrum, och har ofta haft nöjet att bevittna en produktiv och djupgående matematisk förståelse när elever samarbetat på olika sätt. Ibland blir samarbetet bäst när elever sitter tillsammans vid ett bord, eftersom de då kan engagera sig på djupet i varandras idéer, sätta sig in i varandras perspektiv, använda konkret material och samarbeta relationellt och på lika villkor.

Ibland sker samarbete först när elever står upp och arbetar på vertikala whiteboards, något som förespråkas av Peter Liljedahl. Vissa lärare har funnit det arbets sättet omvälvande, med ökat engagemang från elevernas sida.

Även jag tycker om att låta elever stå vid whiteboards under någon del av lektionen, men jag vill också att de tillbringar tid i sina grupper vid borden. Detta anser jag uppmuntrar produktiva relationer, vilket fungerar bäst för att skapa djupt, samarbetsinriktat tänkande.

Angela Torres och Briany Harper, matematikutvecklare i Kalifornien, genomförde ett intressant experiment. De bad deltagare på en konferens att arbeta på olika sätt med samma uppgift. En grupp stod vid en vertikal whiteboardtavla, en grupp satt vid ett bord med en mindre whiteboardtavla mitt på bordet, en grupp hade uppgiften digitalt i programmet Desmos Activity Builder och den fjärde gruppen arbetade vid ett bord, utrustade med papper och penna. Efter att grupperna redovisat sitt arbete gjordes en gemensam utvärdering som visade att alla grupper upplevt produktiva matematiska samtal eftersom själva problemet uppmuntrade till djupt och sammanlänkat lärande. De olika pedagogiska strukturerna gav värdefulla, men delvis olika, matematiska möjligheter.

Experimentet genomfördes på grund av att en del av matematikutvecklarna sagt att de inte kunde sätta igång med grupparbeten förrän de fått vertikala whiteboardtavlor. Detta är ett exempel på när en bra pedagogisk idé (att erbjuda whiteboards som ett alternativ för att stimulera matematiska diskussioner) blir en doktrin som utesluter andra goda pedagogiska strukturer som eleverna också behöver.

Det är viktigt att notera att varken stående vid whiteboards eller sittande vid bord ger förutsättningar för matematiskt samarbete och sammanlänkat lärande om problemen som eleverna ställs inför är snäva och procedurella. Sådana problem leder ofta till att en elev gör själva arbetet medan de övriga tramsar omkring. Undervisning är ett av de svåraste, och samtidigt mest givande, yrken som finns eftersom undervisning är ett komplext system, där varje del av systemet påverkar de övriga. Produktiva samtal uppkommer när grupper samarbetar på lika villkor, när produktiva klassrumsnormer etableras och när rika och "gruppvänliga" problem används. Alla dessa delar av systemet förutsätter och utvecklar varandra.

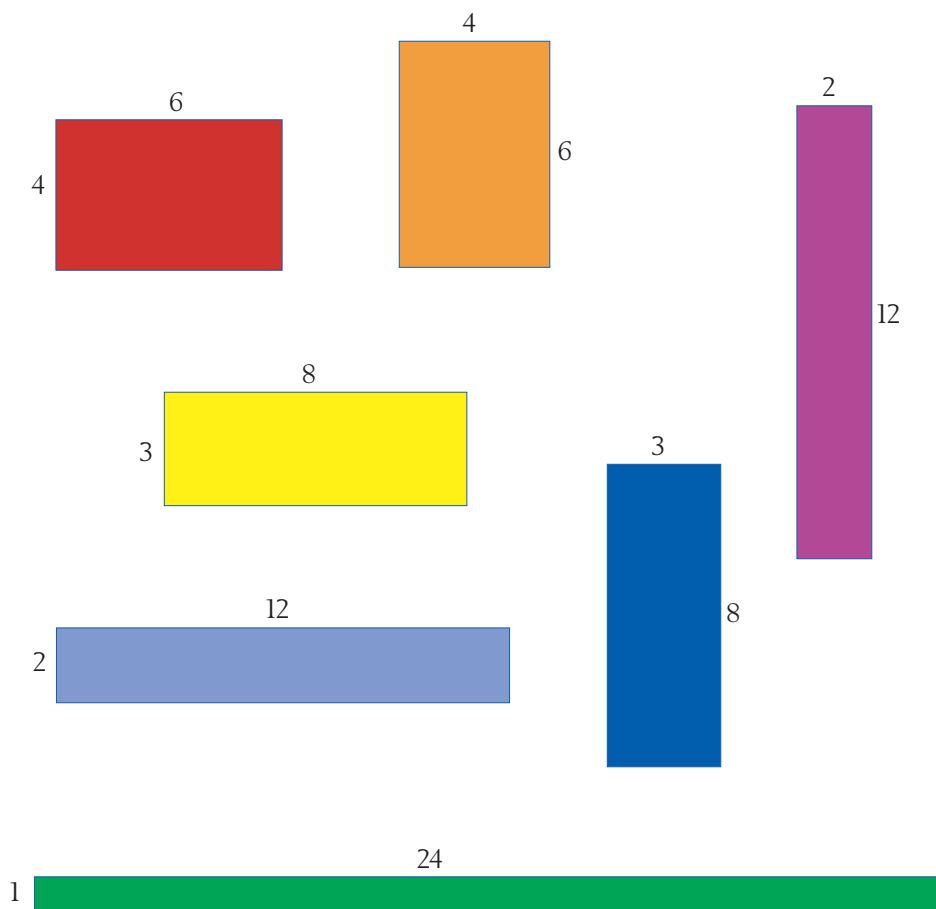


## Matematikfrågor och uppgifter

Oavsett vilken pedagogisk struktur vi använder, bör vi alltid sträva efter att elever tänker på djupet kring matematik, ser det visuellt och inser att det alltid finns olika sätt att närma sig en matematiska idé. I boken *Math-ish: Finding creativity, diversity & meaning in mathematics* beskriver jag olika sätt att uppnå detta. Ett sätt är be eleven ge ett ish-svar (ett ungefärligt svar, en uppskattning) innan de börjar räkna för att hjälpa dem att tänka begrepsligt och utveckla taluppfattning.

Frågor och uppgifter som uppmuntrar elever att visualisera matematik och att prova olika strategier upplevs som öppna – något som är ett kritiskt villkor för ett fruktbart grupparbete. Istället för att be eleverna beräkna arean av en  $8 \times 3$ -rektangel kan vi fråga dem hur många rektanglar som har en area på 24. Denna enkla förändring gör det möjligt att betrakta förhållandet mellan längd och bredd, att rita och visualisera, och att gå bortom en beräkning för att nå en djupare förståelse av begreppet area.

Det finns många exempel på den typen av öppna uppgifter, inom vitt skilda matematikområden, på den öppna webbplatsen [www.youcubed.org](http://www.youcubed.org).



Där finns också filmer som visar elever som är djupt engagerade i produktivt matematiskt tänkande och resonemang. Filmerna visar elever som utvecklar god begreppsförståelse, ibland genom att visualisera eller använda konkret material, ibland genom att samtala om ett problem stående vid en whiteboard, och ibland i enskilt arbete med papper och penna. Lärarna visar upp en stor variation av pedagogiska strukturer och engagerar eleverna i olika sorters matematiskt tänkande. På youcubed finns en stor mängd fritt tillgängliga uppgifter, matematiska problem, aktiviteter, lektionsplaneringar, inspirationsfilmer, artiklar och mycket annat. (Originalen till den här artikel har också publicerats där).

Vi får inte glömma bort att eleverna behöver den här sortens pedagogisk mångfald för att utveckla matematisk förståelse. Vi får inte ge efter för doktriner som säger att alla elever är bäst hjälpta av en enda sorts undervisning.



#### LITTERATUR

- Boaler, J. (2024). *Math-ish. Finding creativity, diversity, and meaning in mathematics*. Harper Collins.
- Boaler, J. (2017). *Matematik med dynamiskt mindset : hur du frigör dina elevers potential*. Natur & Kultur.
- Harris, P. W. (2025). *Developing mathematical reasoning: Avoiding the trap of algorithms*. Corwin Press.
- Liljedahl, P. (2022). *Att bygga tänkande klassrum*. Gleerups.
- STEM Women. (2022, Jan. 5). *The top transferable skills employers look for*.

