SIM 2024

Semana Inspiracional da Matemática

Estrelas de Círculo Numérico

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

Esta é uma atividade aberta e investigativa. Convidamos os alunos a examinarem uma ideia que parte de uma pergunta bastante natural: “e se, ao invés de fazermos contagens salteadas (por exemplo de 2 em 2) em uma linha, nós fizéssemos em um círculo?” A partir disso, eles são incentivados a seguir caminhos que considerem interessantes. Esperamos que essa proposta contribua para que os alunos exercitem sua autonomia e criatividade enquanto exploram conceitos introdutórios das áreas de teoria dos grafos e teoria dos grupos.

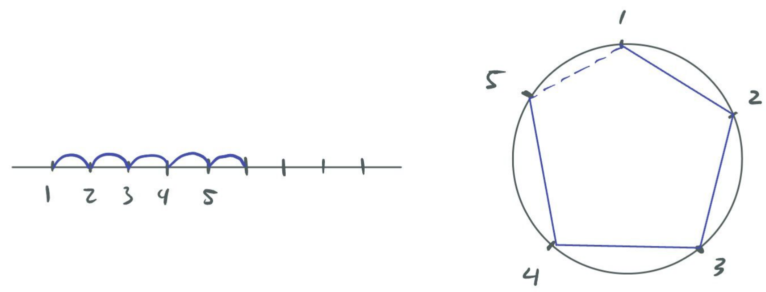
Materiais

- Ficha de atividade com círculos
- Canetas ou lápis coloridos

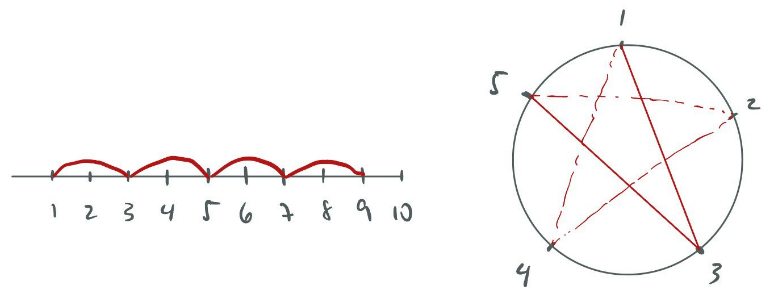
Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente: Lançar

Desenhe, no quadro, duas retas numeradas de 1 a 10 e dois círculos com números de 1 a 5 distribuídos de forma equidistante. Em uma das retas, desenhe “saltos” conectando cada número ao seguinte, como se estivesse contando de um em um. Explique que, ao contar em uma reta numérica, não podemos ligar os números com uma linha reta, pois as linhas ficariam em cima da própria reta numérica. Por outro lado, ao contar em um círculo, é possível conectar os números com linhas retas. Peça aos alunos que façam uma previsão sobre qual figura será formada ao contar (e conectar), de um em um, os números no círculo numerado de 1 a 5.



Em seguida, conte e conecte os números no primeiro círculo. Observe que, ao chegar ao número cinco, para que continue contando, você retorna ao número um, fechando o pentágono. Continuaremos esse processo até completarmos o percurso que estamos formando.

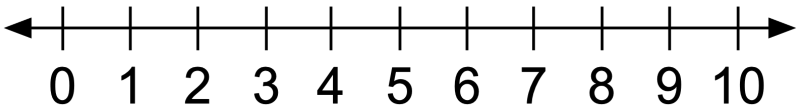


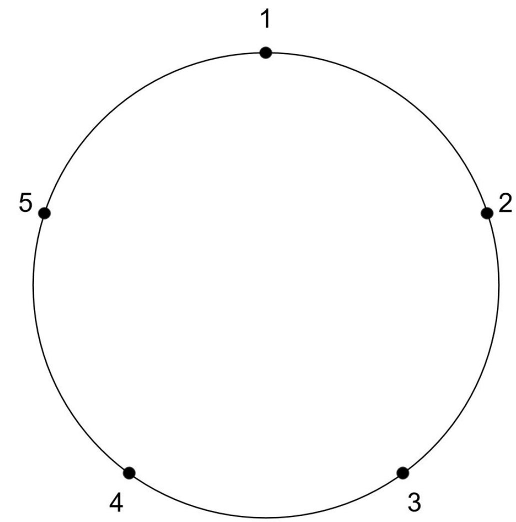
Com isso em mente, realize uma contagem salteada de dois em dois na segunda reta numérica e peça aos alunos que façam uma previsão sobre qual forma será gerada ao aplicar essa contagem salteada no círculo. Em seguida, execute essa contagem no segundo círculo também.

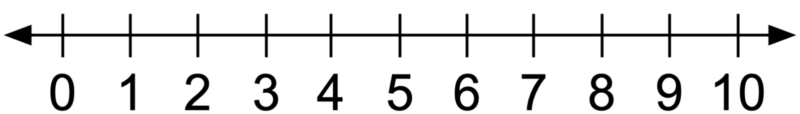
Informe aos alunos que a tarefa deles será explorar essa ideia de contagem salteada no círculo com mais profundidade, elaborar hipóteses sobre o assunto e aprovar, ou não, as hipóteses uns dos outros. Incentive-os a utilizar cores e as folhas com os círculos para organizar o raciocínio.

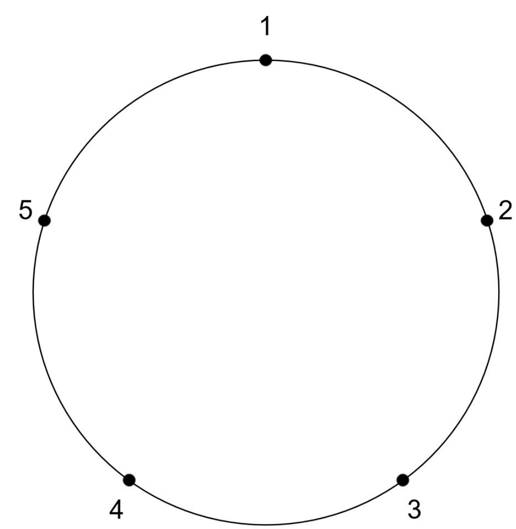
Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico









Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente: Investigação

Organize os alunos para trabalharem em duplas ou grupos. Distribua a ficha de atividade com os círculos, ou recorte os círculos, de modo que cada um possa escolher aqueles com o número de pontos que desejar. Cada aluno pode trabalhar em seu próprio desenho, mas é incentivado a compartilhar suas ideias, raciocínios e hipóteses com sua dupla ou grupo.

Enquanto os alunos criam seus desenhos e exploram, circule pela sala e ouça suas conversas. À medida que fizerem questões e conjecturas, convide-os a compartilhá-las no quadro ou em um cartaz. Considere registrar todas as hipóteses apresentadas de forma que fiquem acessíveis aos alunos, permitindo que continuem a desenvolvê-las em seu tempo livre.

Após um período de exploração, você pode fazer uma pausa para uma conversa coletiva. Convide os alunos a compartilharem suas representações visuais utilizando um projetor, assim como suas hipóteses e perguntas.

Caso ainda não tenha apresentado aos alunos a Estrutura do Cético compartilhe-a neste momento e incentive-os a fazer perguntas uns aos outros e a construírem argumentos convincentes.

Após esse momento de troca, convide os alunos a prosseguir com a investigação. Eles podem optar por aprofundar uma ideia apresentada por outro colega.

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

Explore

Crie suas próprias estrelas no círculo. Utilize diferentes quantidades de pontos e diferentes números de contagem salteada.

- O que você observa e que perguntas surgem?
- Quais hipóteses você pode formular?

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente: A Estrutura do Cético

Apresente a Estrutura do Cético aos alunos informando que eles precisarão ser convincentes nesta atividade. A notável professora Cathy Humphreys utiliza essa abordagem[1].

Na matemática, dizemos “provar” para nos referirmos ao ato de convencer os outros de que nosso raciocínio está correto. O primeiro nível de convencimento ocorre quando o aluno convence a si mesmo. O segundo nível, quando convence um colega. O terceiro, e mais desafiador, quando convence um cético.

Os alunos devem começar convencendo a si mesmos de que determinado padrão é verdadeiro: isso é o que chamamos de conjectura. Quando estiverem confiantes sobre suas conjecturas, podem trabalhar com um colega para compartilhar o raciocínio e, se necessário, obter ajuda para apresentar sua ideia à turma.

Após a apresentação dos alunos, convide-os a assumir o papel de céticos em relação às conjecturas dos colegas. Isso pode levar a um fortalecimento coletivo da convicção (ou não) sobre determinada ideia. Em ambos casos, valorize o pensamento matemático que os levou a tal conclusão!

---

[1] Leia mais sobre essa estratégia em [Mathish!](#) de Jo Boaler e veja, [aqui](#), sobre sua aplicação no programa de verão do YouCubed.

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

Estrutura do Cético

- Convença a si mesmo
- Convença um colega
- Convença um cético

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente: Recursos Adicionais

No próximo slide, você encontrará uma lista de possíveis caminhos que os alunos podem seguir. Não se tratam de perguntas com respostas específicas e nem todas precisam ser exploradas por todos os alunos ou por todas as turmas. São, simplesmente, possibilidades de investigação. Sinta-se à vontade para compartilhar todas, algumas ou nenhuma delas com seus alunos, conforme julgar apropriado.

Os caminhos apresentados são variados e podem se adequar melhor a alunos em diferentes níveis ou a turmas que desejam explorar ideias específicas. De modo geral, você pode começar com a filosofia de que “menos é mais” e observar os rumos que os alunos tomam. Há muito o que se observar e considerar nesta atividade e eles podem identificar conexões com conteúdo estudado recentemente ou propor ideias próprias que não estão listadas, o que deve ser encorajado!

Além disso, a partir do slide 13, há recursos complementares que explicam alguns conceitos da teoria dos grafos, ampliando ainda mais as possibilidades de exploração dessa atividade. Novamente, cabe a você decidir o quanto compartilhar com os alunos e em qual momento, mas estamos animados em compartilhar linguagens e ideias que não são normalmente apresentadas em aulas de matemática do ensino fundamental e médio.

Essas ideias não são, por natureza, mais complexas do que os conteúdos normalmente ensinados, mas pertencem a um ramo diferente da matemática ao qual os estudantes raramente têm acesso. Encorajamos você a convidá-los a explorar esses conceitos!

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente: Caminhos a explorar

- Quais formas são geradas por diferentes combinações entre o número de pontos no círculo e o número usado na contagem salteada (por exemplo, contagem com saltos de 2 em 2)? É possível classificar essas formas em algum tipo de categoria interessante? Você consegue prever em qual categoria uma combinação específica de números se encaixará?

- Quais combinações numéricas fazem com que todos os pontos sejam tocados antes de retornar ao ponto de partida? Quais não fazem isso?

- Quantas vezes você precisa dar a volta no círculo até que o percurso se feche? Como essa quantidade varia à medida em que diferentes números são escolhidos?

- O que acontece se a contagem começar por um número diferente de 1? Há padrões interessantes nos números que se conectam entre si?

- Se os pontos estiverem distribuídos de forma exatamente equidistante ao redor do círculo (como na folha impressa), quais ângulos são formados pelas linhas que entram e saem de cada ponto?

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente: Exemplos de Conjecturas

- Quando o círculo possui um número primo de pontos, forma-se sempre uma estrela (exceto quando se conta de um em um ou pelo número menos um).
- Se o número utilizado na contagem salteada corresponde à metade do número de pontos ao redor do círculo, o resultado é uma linha (ou um asterisco, se fizer a contagem partindo do ponto 1, depois partindo do 2 e assim sucessivamente para cada ponto).
- Se você somar o número de pontos do círculo ao número usado no salto, obterá a mesma estrela. Experimente somar o número de pontos do círculo (por exemplo, 10) ao número da contagem salteada (por exemplo, 3, para saltos de 3 em 3). Ao fazer uma nova contagem salteada, utilize o resultado da soma (no exemplo, 13) como número da contagem salteada (ou seja, saltos de 13 em 13) e você obterá a mesma estrela.
- Independentemente dos números escolhidos, o percurso eventualmente se fecha.
- Se o número de pontos no círculo for divisível pelo número do salto da contagem, o resultado será um polígono.

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente: Indo além

Você pode optar por compartilhar com os alunos ideias adicionais relacionadas à teoria dos grafos, ampliando ainda mais as possibilidades de investigação. Para começar, apresente aos alunos o slide 13, que contém as definições básicas da teoria dos grafos, uma vez que ele aborda os termos utilizados nos conteúdos seguintes. Permita que os alunos continuem com a investigação que já estão realizando ou escolham uma das áreas da teoria dos grafos sugeridas, com base em seu interesse, para aprofundar a exploração e formular novas conjecturas.

Os estudantes podem ler sobre:

- Grafos direcionados
- Circulantes
- Matrizes de adjacência

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

Agora, com mais teoria dos grafos: O que são grafos?

A **teoria dos grafos** é um ramo da matemática que estuda as estruturas formadas por conjuntos de objetos e suas conexões entre si.

Um **grafo** é composto por um conjunto de **vértices** (os objetos) e **arestas** (as conexões entre esses objetos). No nosso caso, cada ponto no círculo representa um vértice e cada linha que os conecta corresponde a uma aresta, ou seja, já estamos trabalhando com grafos desde o início da atividade. Introduzir alguns conceitos da teoria dos grafos pode abrir novas possibilidades de investigação dentro desta atividade, então vamos lá!

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

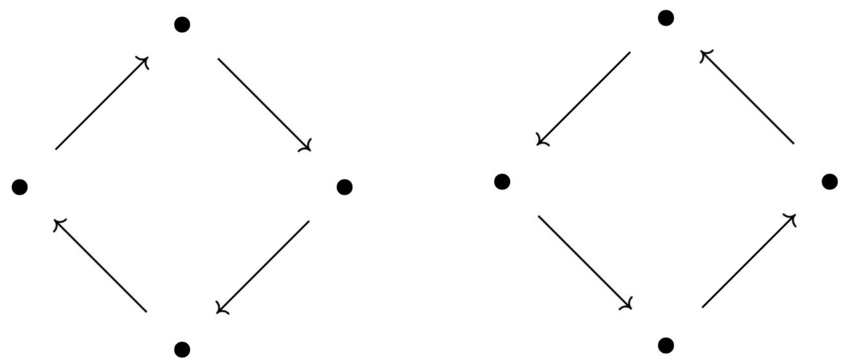
Estrelas de Círculo Numérico

Grafos Direcionados

Um **grafo direcionado** (ou “dígrafo”) é aquele em que cada aresta possui uma direção definida. Costumamos utilizar setas em vez de linhas simples para deixar claro para qual direção que cada aresta está indo.

Em grafos direcionados, consideramos A → B diferente de A ← B.

- Ideia para explorar: Será que existe alguma combinação numérica que tenha formado grafos não direcionados idênticos, mas grafos direcionados diferentes?



Os dois exemplos ao lado representam grafos direcionados diferentes em 4 vértices.

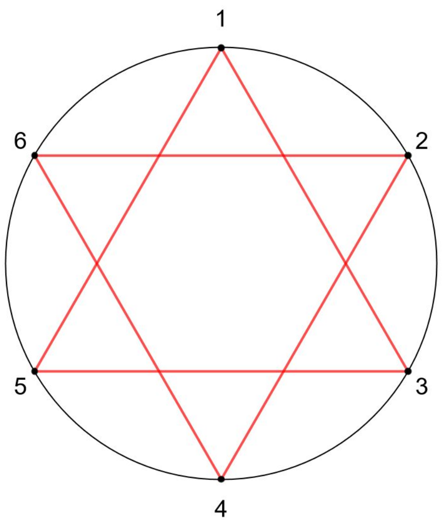
Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

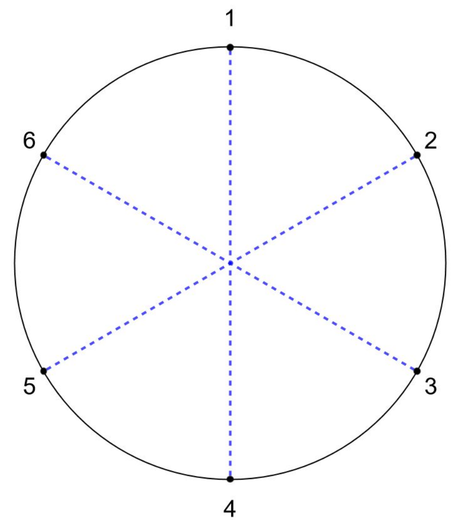
Estrelas de Círculo Numérico

Circulantes

Um grafo não precisa, necessariamente, seguir regras sobre quais vértices devem estar conectados entre si. Nesta atividade, definimos isso por meio da contagem salteada, o que nos leva à construção de um tipo especial de grafo chamado **circulante**. É comum utilizar a notação Ci□(m) para representar um grafo circulante com n vértices, onde se faz contagem salteada de m em m.

Por exemplo, aqui estão os grafos $Ci_6(2)$ e $Ci_6(3)$:



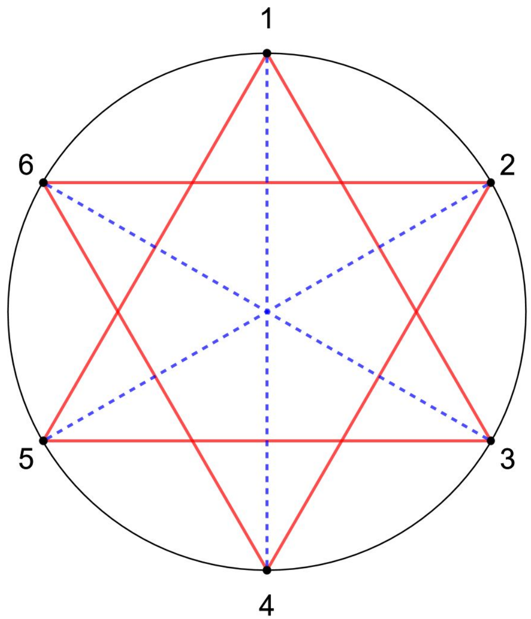


Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

Circulantes

Além disso, selecionamos apenas um número para realizar a contagem salteada, mas, de modo geral, é possível construir um grafo circulante que inclua contagem salteada por diversos números. Por exemplo, você pode escolher um grafo com seis vértices e fazer a contagem salteada de 2 e de 3 no mesmo círculo, o que resulta no circulante $Ci_6(2,3)$ que está ilustrado abaixo.



Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

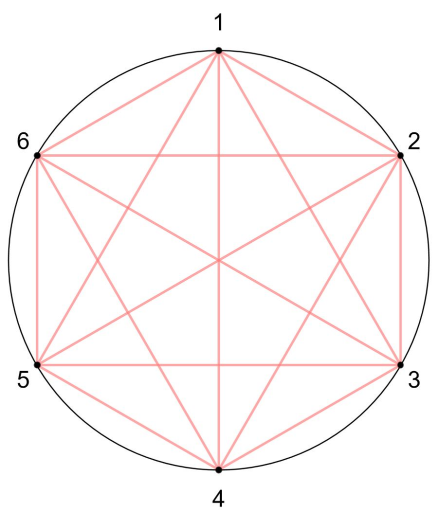
Circulantes

Você pode ler um pouco mais sobre os grafos circulantes aqui (em inglês). Este site utiliza uma linguagem matemática um pouco densa, mas é possível clicar nos termos para ver as definições de conceitos que talvez sejam novos para você, ou simplesmente apreciar as imagens interessantes dos grafos circulantes que eles apresentam!

Explore padrões em que se utiliza mais de um número para realizar a contagem salteada no mesmo círculo.

- O que você observa e que perguntas você faz?
- Quais novos padrões é possível identificar?

Ideia para explorar: Quantos números diferentes você precisa utilizar na contagem salteada para formar um grafo completo (ou seja, aquele em que cada vértice está conectado a todos os outros por uma aresta)?



Este é o grafo completo em 6 arestas (também chamado de K_6).

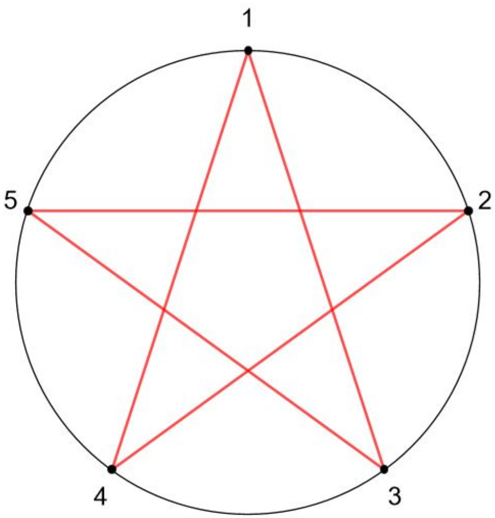
Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

Matrizes de Adjacência

Dizemos que dois vértices são adjacentes quando estão conectados por uma aresta. Uma maneira comum de representar um grafo, especialmente quando queremos comunicá-lo a computadores, é por meio das matrizes de adjacência. Essas são matrizes $n \times n$ (sendo n o número de vértices do grafo), nas quais o elemento localizado na linha i e na coluna j será 1 se os vértices i e j forem adjacentes, e 0 se não forem. Essa definição pode parecer um pouco abstrata, mas vale a pena analisar os exemplos abaixo para compreender melhor.

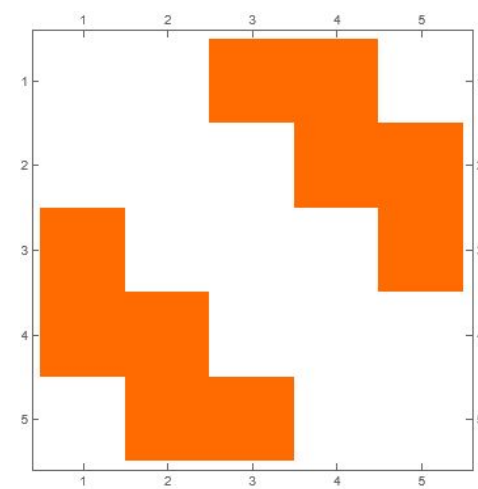
Exemplo 1: Circulante $C_5(2)$ — 5 vértices e contagem salteada de 2 em 2:



Grafo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de Adjacência



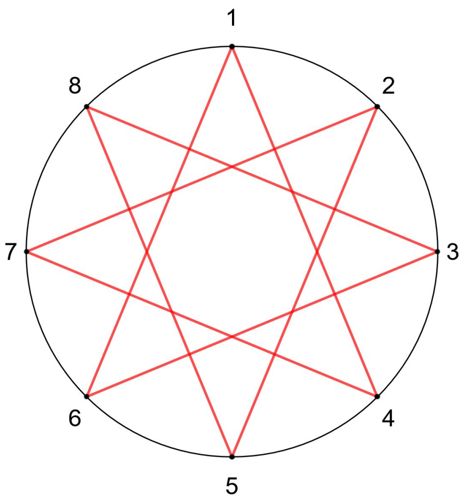
Representação da matriz onde os números 1 são quadrados laranja e os números 0 são brancos

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Estrelas de Círculo Numérico

Matrizes de Adjacência

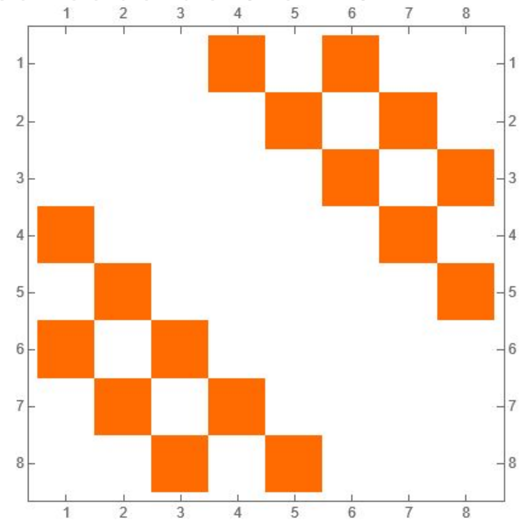
Exemplo 2: Circulante $C_8(3)$ — 8 vértices e contagem salteada de 3 em 3:



Grafo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de Adjacência

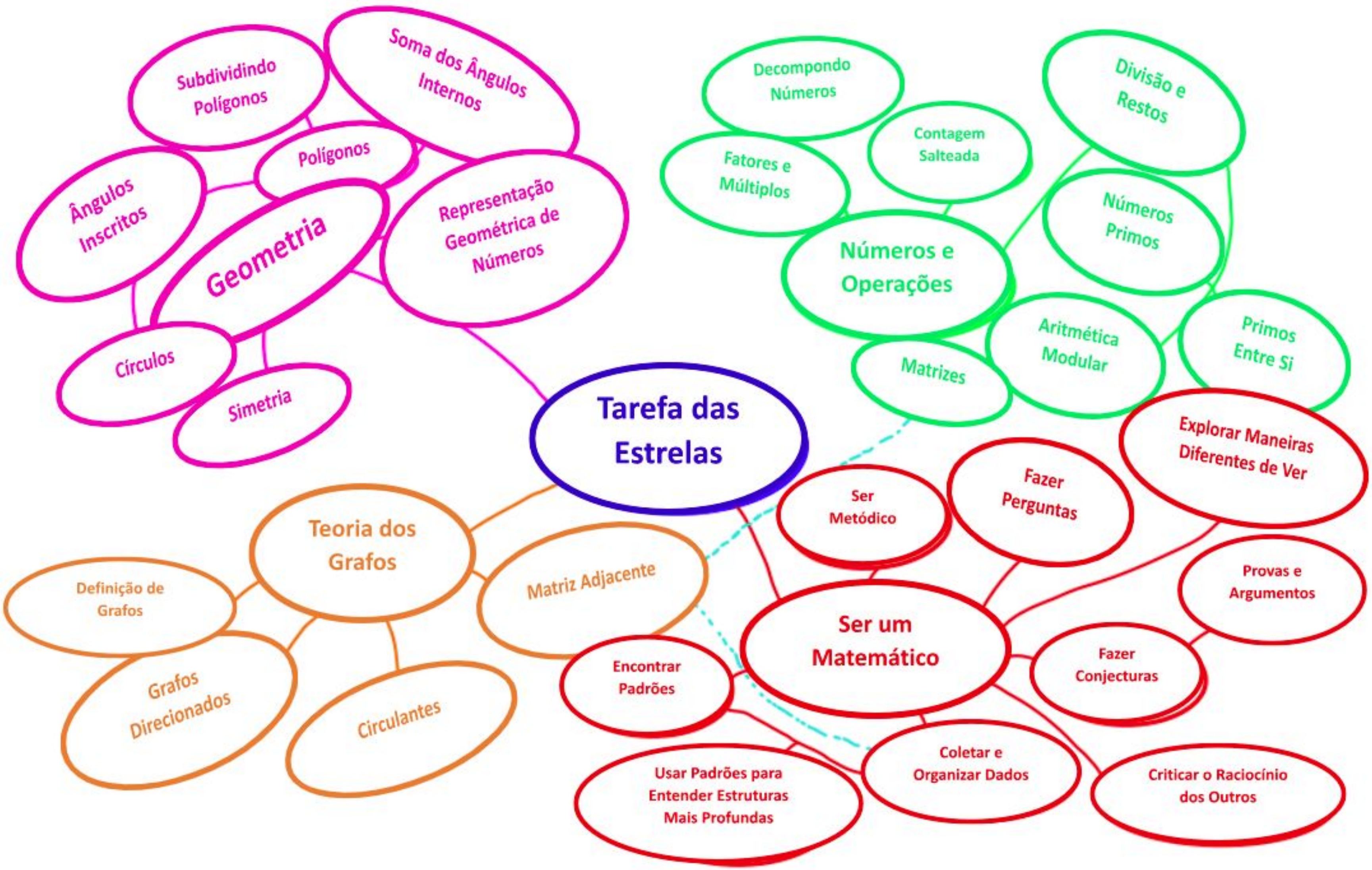


Representação da matriz onde os números 1 são quadrados laranja e os números 0 são brancos

- Ideia para explorar: Quais são algumas características das matrizes de adjacência dos grafos que temos explorado? É possível identificar propriedades que estejam presentes em todas elas? E há propriedades que apareçam apenas em grafos gerados por certas combinações numéricas?
- Exemplo de conjectura: A matriz de adjacência de qualquer combinação de números é simétrica (em relação à diagonal).

Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Para a pessoa docente



Esta obra está licenciada sob a Licença Internacional Creative Commons Atribuição-NãoComercial 4.0.
Para visualizar uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/