SIM 2024

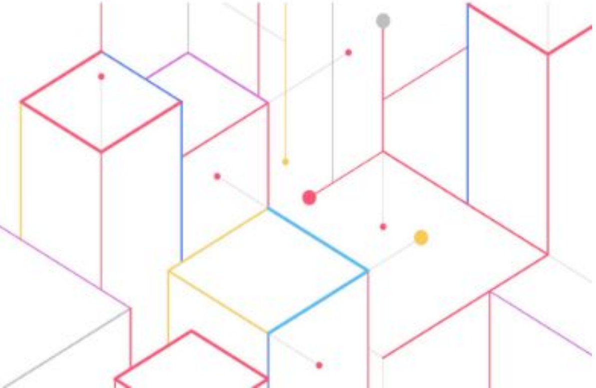
Pontos na Grade

youcubed®

Pontos na Grade: Introdução

Esta atividade apresenta aos alunos a Teoria de Ehrhart, uma área da matemática que aparece em cursos avançados de faculdade, ou além, mas que, em sua essência, pode ser explorada e compreendida sem a necessidade de conceitos particularmente avançados. A Teoria de Ehrhart trata-se de contar os pontos de valor inteiro dentro de formas convexas. Um conceito simples, mas com profundidade notável e fascinante. Nesta atividade, os alunos pensarão sobre isso em duas dimensões, usando quadros geométricos e considerando o número de pinos dentro das formas.

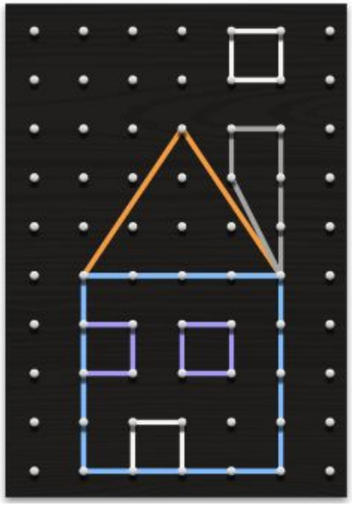
A principal área da matemática em que essa atividade se enquadra é chamada combinatória, que é frequentemente definida como a matemática de contar coisas finitas (nesse caso, as "coisas" que estamos contando são pontos de valor inteiro dentro de formas convexas). Uma das belas características da combinatória é que os problemas combinatórios são frequentemente relacionados a outros campos da matemática e a teoria de Ehrhart, em particular, exige muito pensamento geométrico e algébrico. Além disso, os padrões para a prática matemática são de extrema importância, pois os alunos reúnem seus conhecimentos de várias áreas da matemática para resolver um problema complexo.



Aqui você pode encontrar uma lista de padrões em álgebra, geometria e práticas matemáticas que provavelmente surgirão durante a atividade. Esta lista não é exaustiva, pois diferentes abordagens para a atividade exigirão ferramentas matemáticas diversas. Independentemente do caminho escolhido, será uma exploração rigorosa e interdisciplinar.

Pontos na Grade: Introdução

Esta é uma atividade de três partes: abertura, exploração primariamente geométrica de polinômios de Ehrhart e exploração primariamente algébrica deles, usando sistemas de equações. As três partes podem ser usadas em sequência (para aproximadamente uma semana de aula), ou você pode fazer a abertura e a primeira exploração ao mesmo tempo e retornar para a segunda exploração mais tarde no curso. Esta versão dividida da atividade pode ser especialmente relevante se você estiver abordando sistemas de equações em seu curso.



<u>Materiais</u>

• Quadros geométricos e elásticos (recomendamos fortemente quadros geométricos físicos,
mas, se necessário, há muitos aplicativos bons e gratuitos para computadores ou tablets)

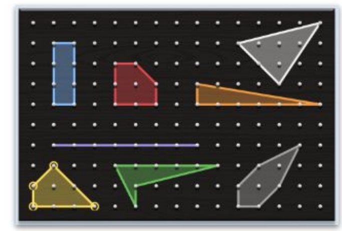
• Papel pontilhado (recomendado) ou papel quadriculado

• Lápis de cor ou marcadores

Pontos na Grade: Abertura

Mostre aos alunos a imagem do quadro geométrico no próximo slide. Pergunte o que eles observam, que perguntas eles têm sobre as formas mostradas e peça que discutam sobre suas diferenças e semelhanças.

Enquanto os alunos discutem, certifique-se de que eles notaram que todas as formas contêm exatamente 8 pinos e diferentes números de pinos "tocando o elástico". Este pode ser um bom momento para esclarecer o que queremos dizer com pinos "contidos" ou "dentro" de uma forma. Os termos "bordas" e "interior" podem ser úteis para descrever os pinos que tocam o elástico e aqueles que não tocam. Em geral, na atividade, quando falamos sobre os pinos dentro da forma, nos referimos tanto aos que estão na borda, quanto aos que estão no interior.

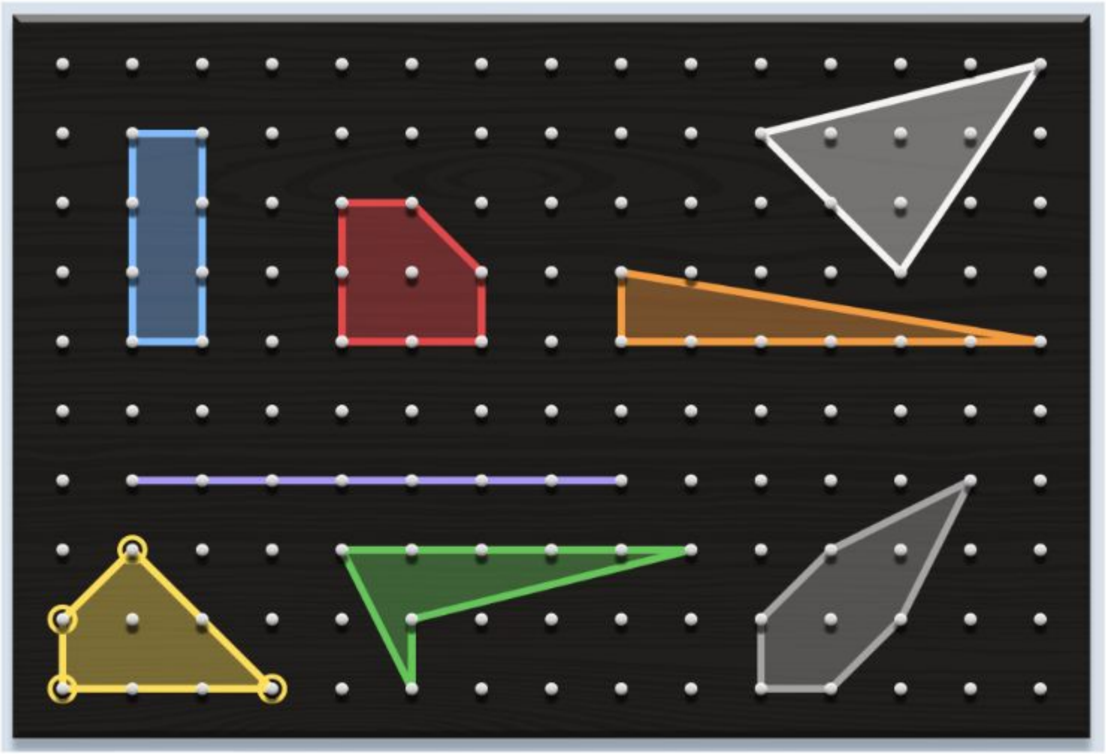


Além disso, incentive-os a refletir como a forma verde é diferente das demais. Enquanto eles discutem isso, introduza a linguagem da convexidade e sua definição. Uma forma é convexa se ela contém o segmento desenhado entre quaisquer dois de seus pontos. Por exemplo, a forma verde não é convexa, porque se você escolher um ponto na parte inferior e outro em direção à direita, o segmento de reta que você desenhará entre eles ficará parcialmente fora da forma.

Compartilhe com os alunos que, nesta atividade, eles se concentrarão em explorar o número de pinos em formas convexas de diferentes tamanhos e que esta é a versão bidimensional de uma área avançada da matemática, chamada Teoria de Ehrhart.

Pontos na Grade

A



- O que você observa e quais perguntas você tem sobre as formas acima?
- Como elas são semelhantes e diferentes umas das outras?

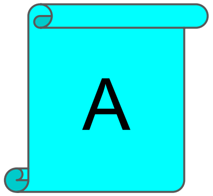
Pontos na Grade: Sobre o Vocabulário

O vocabulário técnico pode ser útil em sua precisão, mas também pode atrapalhar quando os alunos tentam expressar seus pensamentos. No próximo slide, você encontrará as definições de alguns termos frequentemente usados na discussão da teoria de Ehrhart que, juntamente com "borda", "interior" e "convexo", discutidos anteriormente, podem ajudar a evitar confusões enquanto os alunos trabalham nessa nova área. No entanto, não queremos que esses termos dificultem a conversa. Apresente os termos, mas deixe os alunos usá-los conforme for útil para eles.

Com uma nova área e vocabulário novo, pode ser mais fácil falarem sobre "pinos" ou "pontos" em vez de "pontos de rede", e isso é aceitável. Eles podem usar os termos mais formais quando isso for ajudá-los, como dizer "pontos na borda", em vez de ter que explicar o que eles significam em uma frase completa. Isso também pode ser útil quando o modo de comunicação assim exigir, como, talvez, em um produto final onde você gostaria que sua linguagem fosse consistente com a escrita acadêmica da área.

Ideia principal: introduzir o vocabulário é importante, mas não é mais importante do que os alunos sejam capazes de comunicar suas ideias de um jeito que lhes seja eficiente.

Pontos na Grade: Sobre o Vocabulário

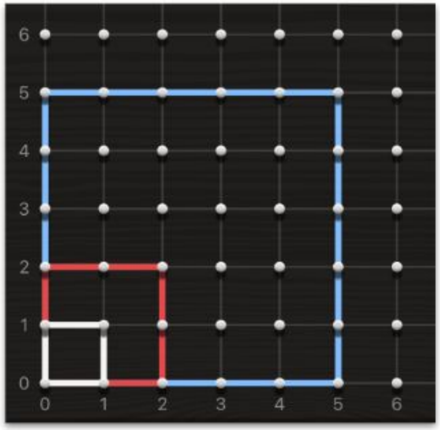


A Teoria de Ehrhart (em 2D) explora “o número de pontos de rede em diferentes dilatações de polígonos de rede convexos”. É muito vocabulário, mas vamos dividi-lo.

• <u>Pontos de rede</u> são pontos cujas coordenadas são valores inteiros. Então, por exemplo, (3,2 , 5) não é um ponto de rede, mas (1 , 7) é. Podemos considerar cada pino em um quadro geométrico como um ponto de rede.

• <u>Polígonos de rede</u> são polígonos cujos vértices estão em pontos de rede. Então, se você fizer um polígono em um quadro geométrico, ele será um polígono de rede.

• <u>Dilatação</u> refere-se ao polígono que resulta da escala de um polígono original por um fator inteiro. Por exemplo, para o quadrado unitário (em branco), você pode ver a segunda dilatação (em vermelho, com um fator de escala de 2) e a quinta dilatação (em azul, com um fator de escala de 1).

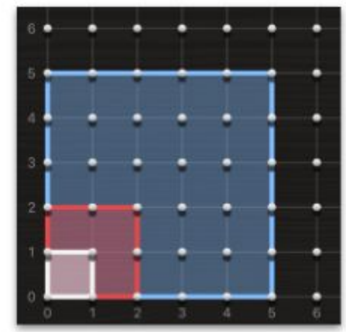


Pontos na Grade: Dimensionamento e Introdução aos Polinômios de Ehrart

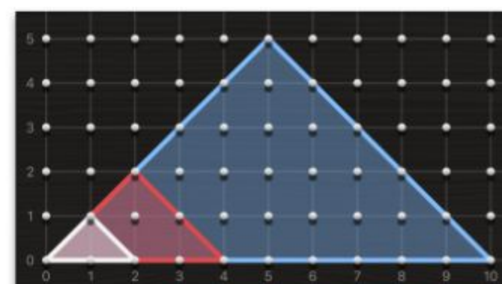
P

Apresente as imagens do próximo slide do aluno. Pergunte o que eles observam e quais perguntas eles fazem sobre as imagens.

Os alunos já devem estar familiarizados com o dimensionamento como uma transformação, mas aproveite essa oportunidade de discutir o que isso significa e como as formas crescem. Conte aos alunos que chamamos essas formas maiores de dilatações das formas originais. Portanto, a forma vermelha é a segunda dilatação e a azul é a quinta dilatação da forma branca.



Pergunte aos alunos o que eles observam sobre o número de pinos (ou pontos de rede) nas formas. Compartilhe com eles que um dos principais (e surpreendentes!) teoremas da teoria de Ehrhart diz que, para qualquer polígono de rede convexo, você sempre pode encontrar um polinômio que conta o número de pinos na enésima dilatação da forma. Por exemplo, o polinômio para o quadrado é:

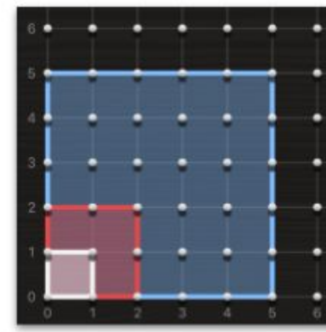


$$L(n) = n^2 + 2n + 1$$

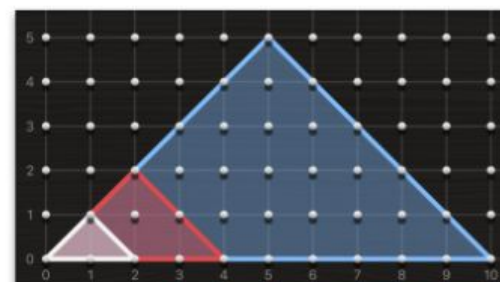
Pontos na Grade: Dimensionamento e Introdução aos Polinômios de Ehrart

$L(n) = n^2 + 2n + 1$

Isso é chamado de Polinômio de Ehrhart para a forma. Você pode pedir para os alunos verificarem se o polinômio de Ehrhart para o quadrado está correto (que $L(1) = 4$ e o quadrado branco tem 4 pinos, por exemplo) e tentar descobrir por que esse é o polinômio adequado.



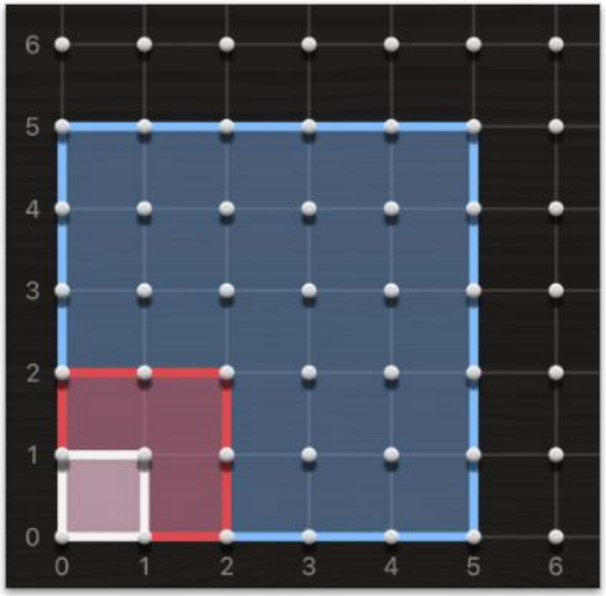
Uma das abordagens que os alunos podem compartilhar é perceber que cada quadrado é uma matriz de pinos de $(n+1)$ por $(n+1)$ e, portanto, o número total de pinos é $(n+1)^2$, ou fazer uma tabela de quantidades (talvez, adicionando a terceira e a quarta dilatação) e reconhecer os números quadrados.

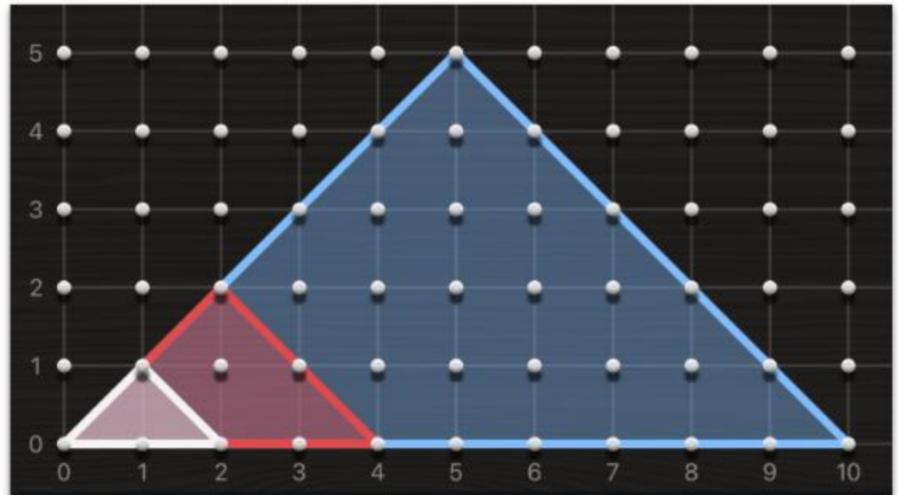


Esta, provavelmente, será a primeira vez que surgirá um ponto de discórdia ao longo da atividade: quando você pensa sobre escala, são os comprimentos laterais que são multiplicados pelo fator de dilatação, não o número de pinos. Por exemplo, uma linha de comprimento 1 tem 2 pinos, sua terceira dilatação tem 4 pinos, não 6. Talvez valha a pena discutir isso com eles.

Pontos na Grade

A

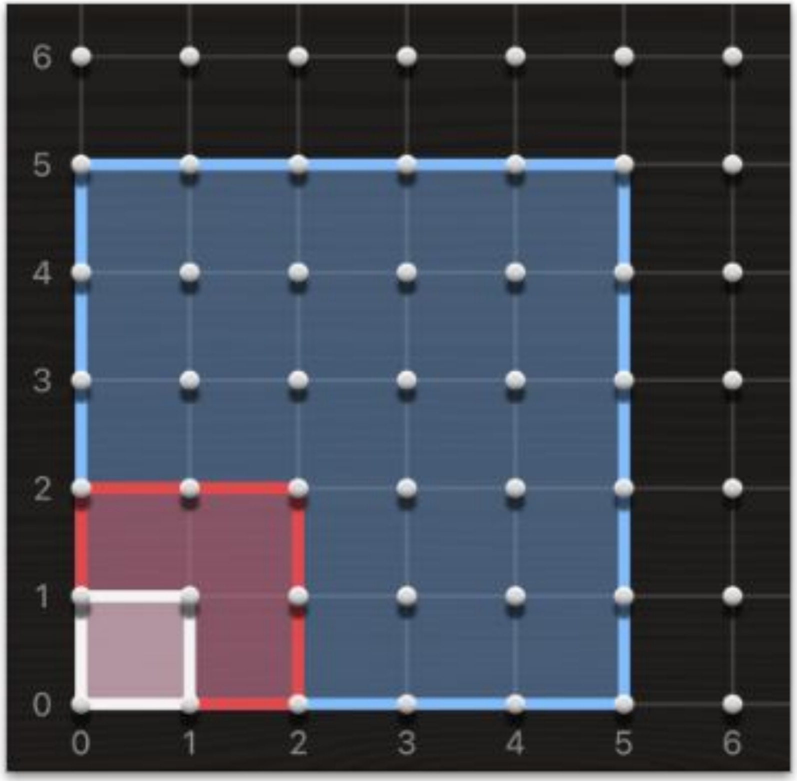




O que você observa e quais perguntas você faz sobre as imagens acima?

Pontos na Grade

A

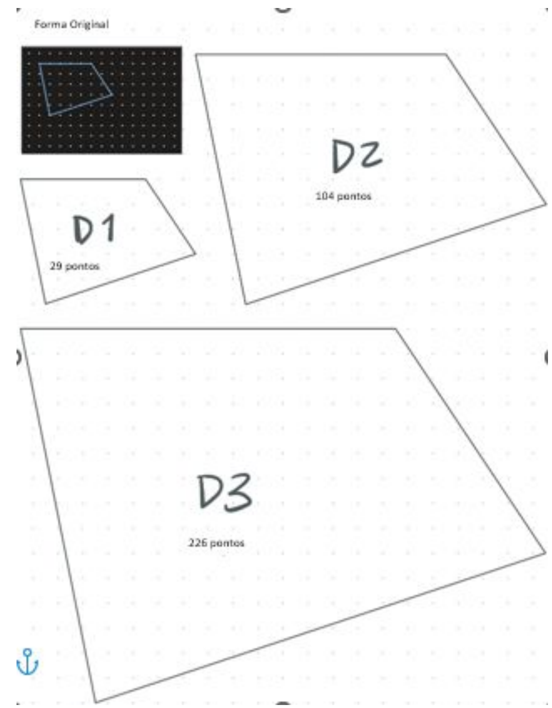


$$L(n) = n^2 + 2n + 1$$

onde **n** é o número da dilatação

Pontos na Grade: Explorando Dilatações

Conte aos alunos que a tarefa deles será criar sua própria forma, considerar suas dilatações e encontrar seu polinômio de Ehrhart. Em duplas, peça aos alunos que criem formas convexas interessantes em seus quadros geométricos e registrem algumas formas favoritas em papel pontilhado (ou papel quadriculado, embora possa ser mais difícil ver os "pinos" com as linhas do papel quadriculado). Peça que escolham uma forma e desenhem duas ou três de suas dilatações.



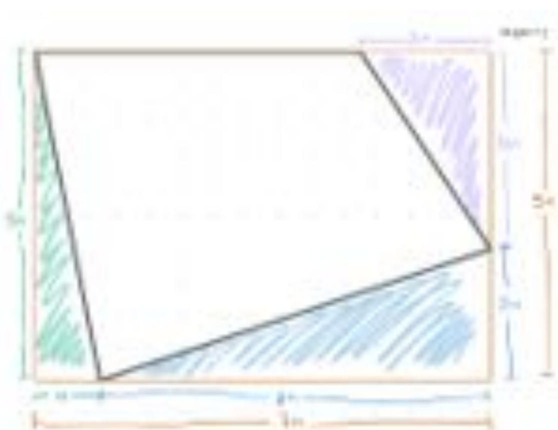
Você pode propor uma discussão com toda a classe ou sugerir que as duplas verifiquem com outra dupla como saber se a dilatação está correta. Algumas ideias que podem surgir são de que as formas "parecem" iguais; que as inclinações de cada linha na dilatação correspondem às da linha original; que o comprimento das arestas é proporcional, etc.

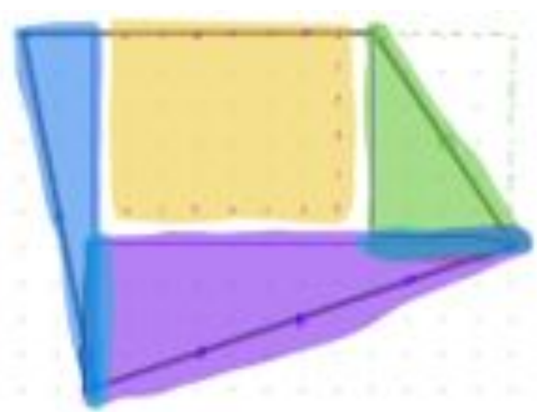
[Você pode encontrar uma versão .pdf do exemplo à direita aqui]()

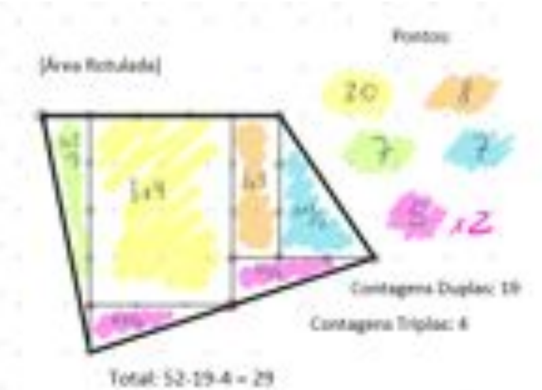
Pontos na Grade: Encontrando Polinômios de Ehrhart

Uma vez que as duplas estiverem convencidas de que suas dilatações estão corretas, peça para elas tentarem encontrar o polinômio de Ehrhart para as suas formas.

Esta é uma atividade difícil e não tem uma abordagem ideal única, mas, no próximo slide, você encontrará exemplos de algumas estratégias úteis que se resumem ao uso de formas que são mais fáceis de entender, como retângulos e triângulos retângulos. À medida em que os alunos começam a encontrar os polinômios de Ehrhart para suas formas, peça para que criem um pôster para compartilhar sua estratégia e o polinômio resultante na forma expandida (deve ser algo como $L(n) = an^2 + bn + c$), caso tenham um. Coloque os pôsteres ao redor da sala para que todos possam ver.







Pontos na Grade: Encontrando Polinômios de Ehrhart

P

Exemplo 1: Este exemplo é altamente detalhado, incluindo uma explicação de uma maneira de abordar triângulos retângulos.

Exemplo 2: Este exemplo mostra um rascunho inicial do trabalho, incluindo reflexões sobre formas que "se sobrepõem" umas às outras.

Exemplo 3: Este exemplo apresenta um trabalho inacabado, incluindo a abordagem geral e o que eles precisam descobrir para encontrar seu polinômio.

Certifique-se de que os alunos tenham tempo suficiente para pensar sobre suas abordagens. Se não estiverem satisfeitos com seu progresso em uma forma, eles devem se sentir à vontade para mudar para uma das outras formas que registraram, ou pensar em uma mais simples para começar (como um retângulo com um triângulo retângulo em um lado). No entanto, desde que sintam que seu esforço é produtivo, não tem problema se eles não encontrarem o polinômio de Ehrhart para sua forma específica, pois há muito a aprender no processo. Sobre fazer os posters, incentive-os a compartilhar sua estratégia geral e onde estão com dificuldades. O importante no pôster é o pensamento deles, não necessariamente encontrar o polinômio correspondente.

Pontos na Grade: Passeio na Galeria

P

Organize uma exposição onde os alunos possam passar um tempo observando as diferentes abordagens das outras duplas. Enquanto isso, copie todos os polinômios que a turma encontrou no quadro. Depois que a exposição terminar, pergunte aos alunos, de forma geral, o que eles observaram. Discuta as várias abordagens adotadas e as diferentes áreas da matemática das quais eles tiveram que recorrer para entender suas formas (tenham ou não chegado a um polinômio). Aqui está uma amostra de tópicos que podem surgir:

Pontos na Grade: Passeio na Galeria

P

Chame a atenção da classe para os polinômios no quadro. Pergunte se eles observam algum padrão. Algumas coisas que eles podem notar são que:

1. Todos os polinômios são de **grau 2**
2. Todos os polinômios têm **1 como coeficiente final**

Nenhum dos dois é coincidência. Ambos foram provados. Um teorema do Ehrhart nos diz que, não apenas os polinômios de Ehrhart sempre existem, mas também que são sempre de grau correspondente à dimensão da forma. Como estamos trabalhando em 2 dimensões, todos os polinômios são quadráticos. Além disso, é sabido que, independentemente da dimensão, todos os polinômios de Ehrhart têm 1 como coeficiente final.

Nota: Dependendo de como você deseja conduzir o resto da aula, talvez não queira confirmar o segundo ponto pois, com essa informação, eles trabalharão em sistemas de equações com duas variáveis; sem essa informação, terão três variáveis.

Pontos na Grade: Encontrando Polinômios de Ehrhart de Uma Nova Maneira

Converse com os alunos sobre como as abordagens que eles desenvolveram funcionaram e que eram geralmente muito visuais, mas difíceis de implementar. Compartilhe com eles que há outra abordagem que você deseja apresentar, que é muito mais abstrata, mas aproveita o que eles sabem sobre polinômios.

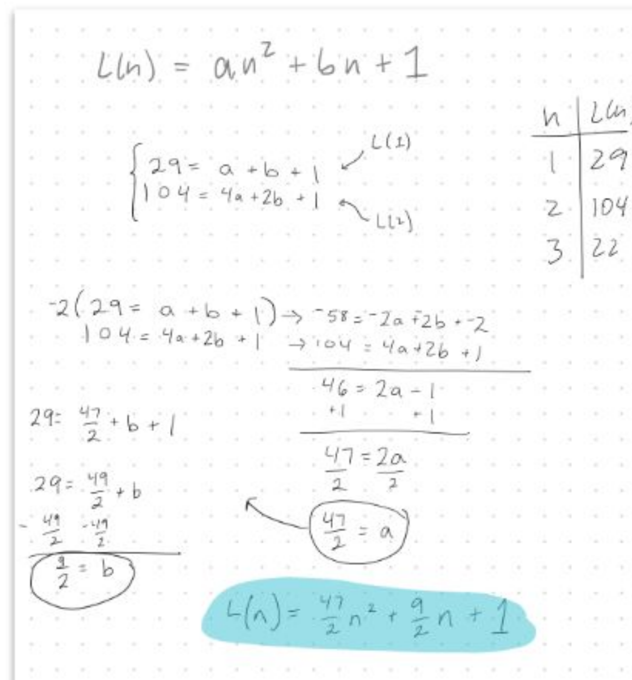
Estávamos trabalhando com o entendimento de que os teóricos de Ehrhart provaram que um polinômio de Ehrhart sempre existe (o que já é surpreendente! Isso significa que eles crescem de forma muito previsível: sem logaritmos, sem fatoriais, sem trigonometria necessária para entender seu crescimento), mas é, especificamente, um polinômio cujo grau corresponde à dimensão da forma. Como estamos em 2D, o polinômio se parecerá com ax^2+bx+1 e, portanto, só precisamos descobrir o que a e b são para cada caso.

> **Nota:** Se, anteriormente, você decidiu não confirmar que $c=1$ para todos os casos, você terá polinômios que se parecem com $f(x) = ax2+bx+c$ aqui, levando a um sistema de três equações na próxima etapa.

Pontos na Grade: Encontrando Polinômios de Ehrhart de Uma Nova Maneira

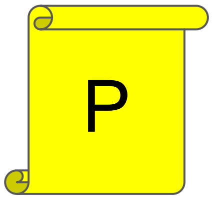
Observe que, mesmo que os alunos estejam familiarizados com a resolução de sistemas de equações, eles podem ficar confusos pelo fato de que os coeficientes do polinômio agora são as variáveis que eles estão resolvendo, e L(n) e n são informações que eles podem encontrar escolhendo dilatações específicas e contando os pontos de rede dentro delas.

Você pode dar aos alunos um tempo para discutirem com seus grupos como usar seu conhecimento de sistemas de equações neste contexto, e debater isso com a classe. Em seguida, dê aos alunos tempo para calcular seus polinômios com esta nova abordagem.



Você pode ver o exemplo correspondente à forma nos slides anteriores à direita e [baixá-lo em formato .pdf aqui.]

Pontos na Grade: Reflexão



Assim que os alunos encontrarem seu polinômio de Ehrhart, usando sistemas de equações, discutam os seguintes pontos de reflexão:

- Qual método vocês preferiram para encontrar o polinômio de Ehrhart? Por quê?
- Quais são as vantagens e desvantagens de cada método?
- Houve algo neste problema que vocês acharam inesperado ou surpreendente?
- Isso traz outras questões que vocês gostariam de explorar em relação às formas e aos pontos de rede contidos nelas?

Pontos na Grade: Extensões!

P/A

Aqui estão fatos adicionais sobre a Teoria de Ehrhart para uma exploração mais aprofundada:

- O teorema sobre polinômios de Ehrhart existirem e serem do mesmo grau que a dimensão da forma se aplica além de duas dimensões. Você consegue pensar sobre o que é o polinômio de Ehrhart de um cubo? E sobre outras formas convexas 3D?

- Vocabulário bônus: a generalização de polígonos convexos para qualquer dimensão é chamada de polítopo. Portanto, tanto quadrados quanto cubos são exemplos de polítopos.

- Conversamos sobre o coeficiente final do polinômio de Ehrhart ser sempre igual a um, mas também sabemos que o coeficiente líder corresponde ao volume (ou área, no caso 2D) da forma original sem dilatação. Você pode verificar isso nos polígonos com os quais trabalhou? Isso te ajuda ou torna seu trabalho mais fácil?

- Na combinatória, há um conceito chamado reciprocidade combinatória. Significa que, às vezes, quando você tem um polinômio que conta algo, você pode inserir números negativos nele e ver se isso conta algo mais. No nosso caso, quando n é positivo, os polinômios de Ehrhart contam o número de pontos de rede na enésima dilatação de um polinômio. Quando n é negativo, eles contam algo diferente sobre a forma. Você consegue descobrir o que é? (veja a nota invertida do próximo slide).

Pontos na Grade: Leitura Adicional

P/A

- Benjamin Braun é um professor da Universidade de Kentucky, cuja pesquisa envolve a Teoria de Ehrhart. Embora eu não recomende a leitura de dissertações de matemática, faço uma exceção para a dissertação dele. O primeiro capítulo de sua dissertação traz uma discussão maravilhosamente acessível sobre a Teoria de Ehrhart em 2 dimensões, com uma abordagem um pouco diferente daquela que usamos nesta aula. Sugiro que deem uma olhada e explorem além do capítulo 1, para ter uma ideia de como está o trabalho atual nessa área.
- Esses são bem mais densos, mas se você quiser ver como são os livros didáticos de matemática (de livre acesso!) que falam sobre a Teoria de Ehrhart, confira Combinatorial Reciprocity Theorems (Capítulo 1.4) ou Computing the Continuous Discretely (Capítulo 3 e 4).

Bem-vindo a uma pequena nota invertida! Ela está de cabeça para baixo para que você não a leia por acidente e estrague a diversão. :) Quando você insere um número negativo em seu polinômio de Ehrhart, ele informa quantos pontos de rede estão no *interior* da dilatação correspondente de sua forma. Portanto, L(-2) dirá quantos pontos estão na segunda dilatação de sua forma. Incrível, certo? Você consegue se convencer de que isso é sempre verdade? Saber disso o teria ajudado na atividade? Como?