

# O Que Tem na Sacola?



## Descrição

Os alunos exploram sacolas com cubos coloridos, tentando prever seu conteúdo.

Os grupos buscam estabelecer qual a probabilidade de sortear um cubo azul da sacola, criando formas de quantificar a probabilidade.

## Programa do dia:

Atividade	Tempo	Descrição/Apontamentos	Materiais
Início	10 min	Mostre aos alunos uma das sacolas e diga que, dentro delas, há cubos coloridos, mas nós não sabemos quantos ou quais as suas cores. Convide-os a tirar um cubo de dentro da sacola e usar isso para prever os seus conteúdos. Repita o processo para mostrar como um maior número de dados aumenta a confiança nas previsões.	<ul style="list-style-type: none"><li>Uma sacola com cubos, qualquer uma do conjunto de sacolas feitas para a turma.</li></ul>
Exploração	30+ min	Os grupos exploram várias sacolas de cubos e tentam fazer uma conjectura sobre os conteúdos de cada uma delas. Eles devem tirar um cubo por vez, devolvendo cada um antes de tirar o próximo.	<ul style="list-style-type: none"><li>Várias sacolas com cubos coloridos (ver a seção "Para Professores" para mais detalhes).</li></ul>
Discussão	20-30 min	Para cada sacola, discuta as conjecturas dos grupos sobre os conteúdos, como os alunos chegaram a essas ideias, e como essas previsões se comparam. Revele os conteúdos de cada sacola e compare-os com as conjecturas. Discuta sobre os métodos que se revelaram mais precisos.	<ul style="list-style-type: none"><li>Várias sacolas com cubos coloridos (ver a seção "Para Professores" para mais detalhes).</li></ul>

realização:



apoio:



<b>Exploração</b>	45+ min	Os alunos jogam um jogo no qual ganha quem tirar um cubo azul da sacola. Os grupos exploram a pergunta: Quais são as chances de ganhar com cada sacola? Como podemos colocar as sacolas em ordem, da menos à mais provável de vitória?	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Várias sacolas com cubos coloridos (ver a seção “Para Professores” para mais detalhes).</li> <li>• Cartões das Sacolas para cada grupo, combinados às sacolas prontas.</li> </ul>
<b>Discussão</b>	20+min	Trace uma linha que vá do impossível ao certo e convide os grupos a adicionar um Cartão da Sacola de cada vez à linha, justificando o posicionamento de cada um deles. Ajude os alunos a desenvolver formas quantitativas de justificar a probabilidade de sortear um cubo azul de cada sacola. Compare os resultados dos experimentos conduzidos pelos alunos anteriormente e discuta por que eles não são idênticos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cartões da Sacola, um conjunto por turma.</li> <li>• Fita durex, ímãs, ou alfinetes para afixar os cartões.</li> </ul>

## Para Professores

Para se preparar para esta atividade, você precisa juntar várias sacolas que contenham cubos. Elas precisam ser opacas e fáceis de colocar a mão sem que o seu conteúdo seja visto, como mochilas saco, sacos de papel *kraft*, ou meias. Deve haver pelo menos uma sacola por grupo, mas você pode preparar sacolas extras para as explorações da turma. Componha as sacolas de modo que haja variação no número total de cubos e no número total de cubos azuis, os quais indicarão o ganhador na segunda metade da investigação. Escolha algumas combinações com probabilidades parecidas de o cubo azul ser sorteado, dentre elas, deve haver uma sacola cuja probabilidade é 1 (certa, ou 100%) e uma sacola cuja probabilidade é zero (impossível, ou 0%). Eis algumas sugestões de combinação para você escolher:

realização:



apoio:



15 cubos: 15 azuis  
12 cubos: 11 azuis e 1 vermelho  
20 cubos: 15 azuis, 4 amarelos e 1 vermelho  
10 cubos: 5 azuis e 5 amarelos  
12 cubos: 5 azuis, 4 vermelhos, e 3 amarelos  
20 cubos: 8 azuis, 8 vermelhos, e 4 amarelos  
15 cubos: 3 azuis, 6 vermelhos, e 6 amarelos  
8 cubos: 2 azuis, 4 amarelos, e 2 vermelhos  
10 cubos: 1 azul, 6 amarelos, e 3 vermelhos  
14 cubos: 8 vermelhos e 6 amarelos

Essas distribuições são fornecidas em cartões para você recortar para a segunda metade da investigação, quando os alunos estiverem tentando classificá-las de acordo com a probabilidade de sortear um bloco azul. Perceba que cada sacola corresponde a uma letra nos cartões, assim, os alunos podem se referir às sacolas e comparar as conjecturas para a mesma sacola. Caso você faça suas próprias sacolas, também será necessário fazer seus próprios cartões para combiná-los.

O grande estímulo nessa atividade é descobrir formas de quantificar a probabilidade. Nas atividades anteriores, os alunos desenvolveram a intuição e a linguagem relacionadas à probabilidade, com foco em resultados mais, menos e igualmente prováveis. Esta atividade conecta-os a maneiras mais formais e precisas de descrever a probabilidade com a pergunta: *O quanto isso é provável?*

## Atividade

### Início

Comece a atividade mostrando uma das sacolas de cubos aos alunos e dizendo que, dentro dela, há vários cubos coloridos. Explique que, sem olharmos para o seu interior, não temos como saber o que exatamente está dentro dela. Não sabemos quantos cubos existem ou de que cor eles são. Na investigação de hoje, o objetivo é descobrir o conteúdo da sacola, e, para fazer isso, só podemos tirar um cubo por vez, olhá-lo, e depois devolvê-lo à sacola.

Convide um aluno a tirar um cubo da sacola e a mostrá-lo à turma antes de devolvê-lo. Pergunte à turma: O que vocês acham que tem na sacola? Por quê? Peça a eles que conversem com algum colega nas carteiras próximas, depois colete algumas de suas ideias. Eles provavelmente dirão que um bloco não é suficiente para saber o que tem dentro da sacola. Se esse for o caso, convide outro aluno a tirar outro cubo, mostrá-lo à turma e então devolvê-lo. Repita a pergunta:

realização:



apoio:



O que vocês acham que tem na sacola? Discuta como esse segundo sorteio apresenta mais informações, embora ele não seja o suficiente para se ter certeza.

Anuncie que hoje eles vão explorar algumas sacolas e usar esta forma específica de reunir dados – sortear e repor os cubos – para criar conjecturas sobre o que tem dentro de cada sacola.

## Exploração

Ofereça uma sacola de cubos (ver a seção “Ao Professor”) a cada grupo. Diga aos alunos que cada sacola contém cubos. Peça aos grupos que desenvolvam sua melhor conjectura sobre quantos cubos de cada cor estão dentro da sacola. Para fazer isso, eles só podem tirar um cubo de cada vez, devolvendo-o antes de tirar outro cubo. Perceba que os alunos provavelmente vão apalpar os cubos dentro da sacola para tentar contá-los; isso é perfeitamente apropriado, contanto que eles não vejam o conteúdo.

Reveze as sacolas de um grupo a outro para que cada grupo tenha a chance de criar ideias sobre cada sacola. Os grupos devem registrar os dados coletados sobre cada sacola, nomeando-os para que saibam de qual sacola os dados vieram.

## Discussão

Discuta as perguntas a seguir sobre cada sacola, uma de cada vez:

- Quais são suas conjecturas sobre os conteúdos da sacola?
- Como vocês chegaram à sua conjectura?
- O quanto vocês estão confiantes na sua conjectura? O que vocês poderiam fazer para aumentar sua confiança?
- Como as nossas conjecturas se comparam? Quais vocês acham que são as mais precisas? Por quê?

Durante a discussão sobre as diferentes sacolas, os alunos podem sugerir combinar seus dados para tornar as conjecturas mais precisas. Caso o façam, apoie-os nessa iniciativa e, depois, compare os resultados com as conjecturas individuais dos grupos.

Após discutir sobre cada sacola, abra-as para mostrar seu conteúdo à turma. A “câmera de documentos” funciona bem nesse caso. Discutam as questões a seguir:

- Quais conjecturas foram as mais aproximadas?
- O que isso nos diz sobre métodos eficazes?

realização:



apoio:



Após a discussão sobre as sacolas, faça as seguintes perguntas aos alunos:

- Quais métodos nos ajudaram a chegar mais perto do conteúdo das sacolas durante a criação das conjecturas?
- Por que você acha que eles funcionaram?

## Exploração

Explique aos alunos que eles vão fazer um jogo com essas sacolas. Nesse jogo, os jogadores se revezam tirando um cubo da sacola e devolvendo-o. Vence o jogador que tirar o cubo azul.

Os grupos exploram as seguintes perguntas:

- Qual a chance de vitória para cada sacola? Como vocês sabem?
- Como podemos colocar essas sacolas em ordem, desde a sacola com mais chances de vitória, à sacola com menos?

A cada grupo, ofereça acesso às sacolas e um conjunto de Cartões das Sacolas para combiná-los às sacolas exploradas pela turma. Os grupos podem usar esses cartões para obter informações ou literalmente organizá-los na ordem, da probabilidade maior à menor.

## Discussão

Desenhe uma linha horizontal no quadro e escreva *impossível* numa extremidade e *certo* na outra; nela, os alunos devem afixar os cartões, da maior à menor probabilidade. Convide cada grupo a colocar um cartão no quadro e a explicar por que o estão colocando ali. Ao fazê-lo, eles precisam explicar sua posição na linha e sua posição relativa aos outros cartões. Você pode fazer estas perguntas:

- Como vocês decidiram onde colocar o cartão?
- Por que vocês acham que ele é mais (ou menos) provável do que o cartão ao lado?
- Qual a probabilidade de uma pessoa sortear o cubo azul dessa sacola? Como vocês sabem?

O objetivo principal dessa discussão é ajudar os alunos a encontrar formas de descrever a probabilidade com os números, seja com termos como 40%,  $4/10$ , ou 4 de 10. Durante a discussão sobre as sacolas com probabilidades parecidas de sorteio do cubo azul, os alunos precisarão justificar por que uma ou outra oferece maior ou menor probabilidade. Casos assim de algum modo incentivam a quantificação da probabilidade.

Discuta um pouco sobre esses casos para esboçar maneiras de comparar com precisão as probabilidades de um cubo azul ser sorteado.

Pergunte aos alunos: Como essas probabilidades se comparam aos dados que você coletou mais cedo? Dependendo do tamanho da amostra, elas

realização:



apoio:



devem estar próximas, mas não tanto, do que os alunos descobriram. Use essa oportunidade para identificá-las como *probabilidade empírica*, ou a probabilidade de um evento ser descoberto por meio de sua simulação, e *probabilidade teórica*, ou a probabilidade de um evento ser descoberto por meio do cálculo dos resultados possíveis. Essas duas formas de probabilidade devem ser próximas, o que significa dizer que a probabilidade teórica prevê o que provavelmente vai acontecer na vida, mas elas poucas vezes são idênticas. Pergunte aos alunos por que isso acontece.

## Fique de Olho

- **Como os alunos estão conectando os dados a suas conjecturas?**  
Durante a coleta de dados sobre cada sacola, os alunos têm a oportunidade de fazer conexões entre os dados e uma previsão sobre o conteúdo da sacola. Eles podem tentar fazer isso de forma um tanto literal, tirando 10 cubos, um de cada vez, e depois prevendo que há 10 cubos compostos de seus resultados exatos. Essa estratégia pode ajudá-los a formar um tipo de previsão, uma vez que há de fato 10 cubos na sacola, mas uma previsão mais precisa poderia ser alçada se eles sortearsem os cubos 20 ou 30 vezes. Caso o façam, os alunos vão precisar pensar de forma proporcional sobre os conteúdos. Se eles acharem que há 15 cubos na sacola e sortearsem os cubos 30 vezes, podem cortar seus resultados pela metade para fazer uma previsão. Isso seria mais preciso, mas também poderia causar a previsão impossível de que há  $4\frac{1}{2}$  cubos azuis. Caso você perceba esse tipo de raciocínio, não deixe de chamar atenção para o valor no número maior de tentativas e o raciocínio proporcional que os alunos estavam empregando. Pergunte: Vocês realmente acham que há  $4\frac{1}{2}$  cubos azuis na sacola? Caso isso não seja possível, qual previsão possível vocês poderiam fazer com base em seus dados?
- **Os alunos estão encontrando a chance experimentando ou analisando os conteúdos da sacola?**  
Na segunda metade da investigação, nós convidamos os alunos a comparar as probabilidades de um cubo azul ser sorteado em cada sacola. Nossa intenção é estimulá-los a desenvolver formas de quantificar a probabilidade, o que pode ser feito de duas formas diferentes. Os alunos podem simplesmente repetir os experimentos, coletando dados para ver qual sacola produz um resultado vitorioso com mais frequência, ou analisar o conteúdo de cada sacola e comparar as chances de um cubo azul ser sorteado com base no número de cubos da sacola. Ambas podem levar a conclusões defensáveis, mas só uma abordagem analítica pode chegar a resultados coerentes e precisos. Os experimentos mudam dependendo dos testes específicos e de quantos você escolhe conduzir. Para

realização:



apoio:



incentivar os alunos a usar uma abordagem analítica, pergunte àqueles que estão fazendo experimentos: Vocês acham que os seus resultados serão sempre verdadeiros? Quanta confiança vocês têm de que uma sacola oferece mais oportunidades de vitória que outra? Estimule-os a focar em duas sacolas com probabilidades parecidas de vitória. A única forma de ter confiança em relação a essas sacolas é focar nos conteúdos.

- **Como os alunos estão descrevendo as chances de tirar um cubo azul?**

Os alunos podem quantificar as chances de sortear um cubo azul de muitas formas diferentes. Eles podem usar frações, decimais, proporções, porcentagens, ou linguagem, tal como: “1 de 10” ou “impossível”. Todas são formas válidas de descrever a probabilidade. O segredo é fazer conexões entre essas diferentes formas para que os alunos possam ver que elas são equivalentes, e que eles podem tomar decisões sobre qual forma faz mais sentido para expressar ou

comparar a probabilidade. Por exemplo, “dois de oito” ou  $5/12$  podem ser formas perfeitamente precisas de expressar a probabilidade, e elas têm o benefício extra de potencialmente identificar o número de cubos na sacola, bem como quantos deles são azuis. Mas essas formas podem complicar a *comparação* da probabilidade: decimais e porcentagens tornam essa tarefa muito mais fácil, mesmo que obscureçam o número de cubos em cada sacola. Incentive os alunos a quantificar a probabilidade perguntando: O quanto isso é provável? Depois, pergunte: Como vocês vão comparar essas duas sacolas para saber ao certo qual delas oferece mais chances de vitória?

## Reflexão

Crie uma sacola de cubos coloridos. Qual a probabilidade de sortear cada cor de sua sacola? Como você sabe?

realização:



apoio:





## Cartões das Sacolas

<p><b>SACOLA A</b></p> <p><b><u>20 cubos</u></b></p> <p>8 azuis</p> <p>8 vermelhos</p> <p>4 amarelos</p>	<p><b>SACOLA B</b></p> <p><b><u>8 cubos</u></b></p> <p>2 azuis</p> <p>2 vermelhos</p> <p>4 amarelos</p>
<p><b>SACOLA C</b></p> <p><b><u>15 cubos</u></b></p> <p>15 azuis</p> <p>0 vermelhos</p> <p>0 amarelos</p>	<p><b>SACOLA D</b></p> <p><b><u>10 cubos</u></b></p> <p>5 azuis</p> <p>0 vermelhos</p> <p>5 amarelos</p>
<p><b>SACOLA E</b></p> <p><b><u>15 cubos</u></b></p> <p>3 azuis</p> <p>6 vermelhos</p> <p>6 amarelos</p>	<p><b>SACOLA F</b></p> <p><b><u>12 cubos</u></b></p> <p>11 azuis</p> <p>1 vermelho</p> <p>0 amarelos</p>

Mindset Mathematics, Grade 7, copyright © 2019 por Jo Boaler, Jen Munson, Cathy Williams.  
Reproduzido com a permissão de John Wiley & Sons, Inc.

realização:



apoio:





<p><b>SACOLA G</b></p> <p><b><u>10 cubos</u></b></p> <p>1 azul</p> <p>3 vermelhos</p> <p>6 amarelos</p>	<p><b>SACOLA H</b></p> <p><b><u>14 cubos</u></b></p> <p>0 azuis</p> <p>8 vermelhos</p> <p>6 amarelos</p>
<p><b>SACOLA I</b></p> <p><b><u>12 cubos</u></b></p> <p>5 azuis</p> <p>4 vermelhos</p> <p>3 amarelos</p>	<p><b>SACOLA J</b></p> <p><b><u>20 cubos</u></b></p> <p>15 azuis</p> <p>1 vermelho</p> <p>4 amarelos</p>

*Mindset Mathematics, Grade 7, copyright © 2019 por Jo Boaler, Jen Munson, Cathy Williams.  
Reproduzido com a permissão de John Wiley & Sons, Inc.*

realização:



apoio:

