

Transformando gráficos de funções para criar arte¹

Por Diarra Bousso Gueye

Plano de Aula

Visão Geral

Esta série de aulas pode ser usada como um projeto com uma semana de duração ou em segmentos mais curtos em sala ao longo da unidade (p. ex.: os últimos 20 minutos de toda aula, precedidos por uma retomada do tema e posterior treino sobre os tópicos mais ligados à prática).

Esta série de aulas/projeto envolve gráficos-mestre² e transformações para as seguintes famílias de funções: lineares, quadráticas, funções do círculo, exponenciais, racionais, de raiz quadrada e valor absoluto. Depois, esta série pode ser complementada por uma tarefa do *site* Desmos, para combinar vários padrões na parte final, com o objetivo de criar um desenho artístico voltado a páginas de um livro de colorir, tecidos e obras de arte.

Consulte o Apêndice & Recursos, ao final deste documento, para ver amostras de projetos, ficha de avaliação e lista de objetivos curriculares relacionados.

¹ Nota da revisora técnica (equipe Mentalidades Matemáticas Brasil): o título original é "Using Parent Graph Transformations to Create Art", que em português pode ser traduzido como "Usando as Transformações no Gráfico-Pai para Criar Arte". No entanto, o termo "gráfico-pai" não é usual em português, o que indica que essa abordagem (usar transformações em conexão com funções elementares) é pouco praticada na matemática escolar brasileira, embora seja defendida por muitos especialistas.

² Nota da revisora técnica (equipe Mentalidades Matemáticas Brasil): usaremos a ideia de "função-mestre", também chamada de "função-mãe" Dada uma família de funções, a função-mestre é a mais simples delas, que pode ser utilizada para obter as demais, de duas maneiras: algebricamente, mediante alterações em seus parâmetros; graficamente, aplicando transformações geométricas ao seu gráfico, que será chamado "gráfico-mestre", também chamado de "gráfico-pai". Por exemplo, entre as funções lineares, a função-mestre seria $y = x$, e o gráfico-mestre, portanto, seria a bissetriz dos 1º's e 3º's quadrantes do plano cartesiano.

realização:



apoio:



Perguntas Essenciais/ Grandes Ideias/ Compreensões Duradouras

Como podemos usar a expressão de uma função-mestre para criar modelos com a matemática, a fim de entender e criar formas no mundo real? Que tipo de matemática está por trás da beleza que vemos no mundo? Como a matemática pode me ajudar a apreciar essa beleza? Como as mudanças nos parâmetros das funções afetam a forma de seus gráficos?

Objetivos Amplos de Aprendizado: Os alunos conseguirão:

- Usar os gráficos-mestre das famílias de funções lineares, quadráticas, exponenciais, racionais, raiz quadrada e valor absoluto como a base para criar estampas de tecidos.
- Criar o gráfico de uma função-mestre, aplicar transformações usando os parâmetros a , h , e k (com Desmos) e criar um desenho que seja esteticamente agradável, para ser usado num livro de colorir, estampa de tecido ou obra de arte.
- Criar simetrias de reflexão e rotacionais em seus desenhos, manipulando as transformações.
- descrever, em linguagem acadêmica, como chegaram ao desenho e como transformaram as os gráficos-mestre.

Nota: Ver Apêndice & Recursos ao final deste documento para encontrar as conexões com conteúdo matemático, práticas do Common Core e objetivos de linguagem acadêmica.

realização:



apoio:



Etapas de Ensino e Aprendizado

Atividade	Notas
<p>Etapa 1 – Aquecimento – Perceber e Refletir (10 min)</p> <p>Os alunos vão:</p> <ul style="list-style-type: none">• Olhar e tocar um pedaço de tecido com formas geométricas. <p>A professora vai:</p> <ul style="list-style-type: none">• Perguntar como eles acham que os padrões foram criados. À mão? No computador?	<p>O objetivo é fazer os alunos começarem a ponderar se a matemática pode ser usada para criar formas fora da sala de aula.</p>
<p>Etapa 2 – Explorando Padrões Lineares (15 – 30 min)</p> <p>A professora vai:</p> <ul style="list-style-type: none">• Mostrar padrões aos alunos (no papel ou tecido) com linhas retas tais como listras, que podem ser representadas com equações da forma $y=mx+b$.• Pedir aos alunos que criem suas próprias equações para fazer um gráfico de linhas paralelas em papel quadriculado. <p>Os alunos vão:</p> <ul style="list-style-type: none">• Criar um conjunto de funções lineares e desenhar seus gráficos• Colorir as áreas intermediárias para criar padrões inspirados em listras.	<p>O objetivo é fazer os alunos verem como os padrões são resultado de diferentes formas de colorir entre as linhas. Recomenda-se fazer a atividade em papel quadriculado para que pratiquem a criação de seus próprios gráficos e refresquem a memória sobre o impacto de m e b sobre as retas.</p>
<p>Etapa 3 – Fazendo desenhos com Transformações da Função Quadrática (20 – 45 min)</p>	<p>O propósito é buscar o equilíbrio entre dar aos alunos liberdade</p>

realização:



apoio:



<p>A professora vai:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Distribuir papel quadriculado e uma tabela para que os alunos desenhem o primeiro gráfico-mestre. • Caminhar pela sala e apoiar os alunos durante a criação de suas próprias funções. <p>Os alunos vão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fazer o gráfico da função-mestre $y = x^2$ • Reescrever a expressão geral de uma função quadrática, passando da forma $y = ax^2 + bx + c$ para a forma $y = a(x - h)^2 + k$ • Transformar o gráfico-mestre, desenhando pelo menos 6 parábolas diferentes, manipulando os parâmetros h, k, e a para criar padrões. • Colorir os padrões para criar um desenho. 	<p>para criar suas próprias parábolas e solicitar que manipulem TODOS os parâmetros (a, h, e k) de formas diferentes para mostrar a compreensão conceitual de como os parâmetros impactam os gráficos.</p>
<p>Etapa 4 – Desenhando com Transformações da Função Módulo (Valor Absoluto) (20 – 45 min)</p> <p>A professora vai:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Mostrar aos alunos um tecido com um padrão em forma de V de cabeça para cima ou para baixo e perguntar qual equação eles acham que criou esse padrão • Distribuir papel quadriculado e uma tabela para que os alunos criem o gráfico da função-mestre. • Caminhar pela sala e oferecer apoio enquanto eles criam suas próprias funções. <p>Os alunos vão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fazer o gráfico da função-mestre $y = x$. 	<p>O primeiro objetivo é fazer com que os alunos reconheçam funções de valor absoluto nos padrões de um tecido e, depois, buscar um equilíbrio entre dar liberdade de criar seus próprios gráficos em forma de V e solicitar que manipulem TODOS os parâmetros (a, h, e k) de formas diferentes para mostrar compreensão conceitual de</p>

realização:



apoio:



<ul style="list-style-type: none"> • Escrever a expressão geral da função módulo ($y=a x-h +k$). • Transformar o gráfico-mestre, fazendo pelo menos 6 gráficos diferentes, manipulando h, k, e a para criar padrões. 	<p>como elas impactam os gráficos.</p>
<p>Etapa 5 – Desenhando com outras Famílias de Funções (20 – 45 min)</p> <p>A professora vai:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Distribuir papel quadriculado e uma tabela para os alunos fazerem o gráfico da primeira função-mestre. • Caminhar pela sala e oferecer apoio enquanto eles criam suas próprias funções. <p>Os alunos vão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fazer gráficos de funções-mestre de quaisquer outras famílias de funções, tais como $y= \sqrt{x}$, $y= x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y= b^x$, $x = y^2$ e $x^2 + y^2 = r^2$ • Transformar a(s) função(ões) escolhida(s) de pelo menos 6 modos, manipulando h, k, e a para criar padrões. • Colorir entre os padrões. 	<p>Esta etapa pressupõe que os alunos já conhecem todas as outras famílias de funções mencionadas. Ela precisaria acontecer depois que os alunos tiverem feito anotações ou recebido instruções e um pouco de prática no trabalho com as outras famílias de funções. Neste momento, eles têm ainda mais liberdade, pois podem escolher a terceira família de função com a qual trabalhar. É importante ter em mente que o objetivo é conseguir colorir os espaços intermediários e, nesse aspecto, as equações racionais podem ser escorregadias, mas ainda interessantes para que eles as explorem e descubram a</p>

realização:



apoio:



	limitação sozinhos em termos de quais famílias de função serão mais desafiadoras de pintar nas áreas intermediárias.
<p>Etapa 6 – Juntando Tudo no Desmos (20 – 45 min)</p> <p>A professora vai:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Disponibilizar Chromebooks ou outros dispositivos semelhantes para os alunos e mostrar a eles como colocar suas expressões algébricas no Desmos e como usar a plataforma, tal como mudar as cores das linhas, etc. • Pedir aos alunos que criem um design final usando simetria de reflexão (entre os eixos x / y). • Caminhar pela sala e apoiar os alunos durante o trabalho com o Desmos e ajudá-los a organizar seu trabalho (pedindo que façam gráficos de todas as famílias de funções na mesma cor no Desmos). <p>Os alunos vão:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reunir todo o seu trabalho das partes anteriores (função quadrática, função módulo e outras famílias de funções). • Decidir quais gráficos eles querem manter (pelo menos 4 de cada família) para fazer um desenho usando o Desmos, criando um padrão final que possa servir de página de livro de colorir, base de estampa de tecido ou qualquer outro uso criativo de sua escolha. 	<p>Esta é a etapa final em termos de design, na qual os alunos devem ter uma compreensão clara de quais funções vão 'funcionar' para eles, ou não, em termos do estilo ou estética do padrão final que desejam criar.</p> <p>Espera-se que eles tenham conhecimento básico do software Desmos.</p> <p>O elemento da simetria de reflexão vai impulsionar os alunos a serem mais conscientes em relação a seus gráficos e a mostrarem habilidades nas transformações para além de apenas copiar equações previamente usadas.</p>
<p>Etapa 7 – Encerramento – Atividade de Conclusão (10 min)</p>	<p>Esta é uma etapa crucial e o objetivo</p>

realização:



apoio:



Os alunos vão:

- Refletir sobre: 1) Como a matemática pode se conectar à Arte e ao Design. 2) Como eles vão continuar esse trabalho por conta própria.
- Refletir como: 1) Escrevendo um relato pessoal em forma de redação ou 2) ditar seus pensamentos numa plataforma de áudio ou 3) criar um vídeo curto para mostrar seu desenho final e responder à pergunta de reflexão.

A professora vai:

- Oferecer as ferramentas relevantes para a reflexão dos alunos com base nas estruturas de reflexão 1), 2) ou 3) acima.

é que os alunos vejam as aplicações da matemática na vida real e também tenham o desejo de continuar ainda mais essa exploração fora da Arte e do Design. Com sorte, isso abrirá portas para que eles pensem sobre a matemática de forma criativa e aplicável a vários campos.

Avaliação da Unidade

Criando páginas de livro de colorir usando as transformações dos gráficos-mestre

O Desenho:

Você vai criar um desenho a ser impresso como parte de um livro de colorir. O objetivo é criar algo esteticamente agradável e divertido de colorir (um monte de formas)

Acesse www.desmos.com e “Inscreva-se” no site para salvar seu trabalho.

realização:



apoio:



Requisitos para atender à expectativa.

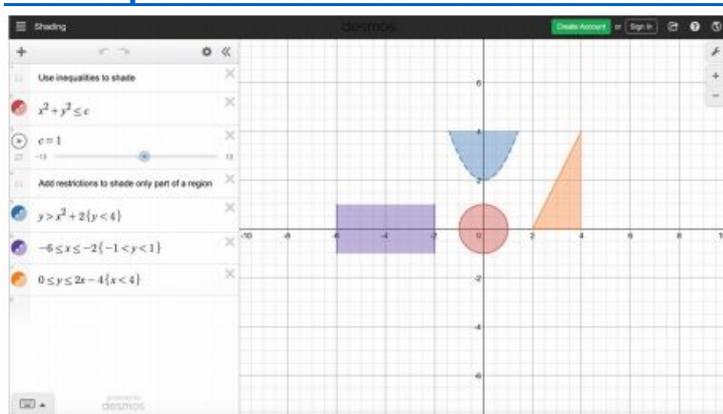
1. Escolha pelo menos 3 famílias de funções diferentes (retas, parábolas, cúbicas, raiz quadrada, módulo, hipérbole) para o trabalho.
2. Crie pelo menos 4 transformações em cada família de função para criar um desenho.
3. Seu design deve ter simetria de reflexão em relação ao eixo x.
4. Clique em “Compartilhar Gráfico” e copie o link da web para aplicá-lo à tela³ **“Imprimir Atividade de Design”**

Critérios de sucesso para ir além do esperado

5. Sombrear o desenho em cores diferentes usando desigualdades e restringindo o domínio. Veja o exemplo abaixo. Usar chaves { } para restringir o domínio e a contradomínio. *Clicar em “Editar Lista” para mudar estilos de linhas e cores.*
6. Seu desenho deve ter simetria de reflexão em relação ao eixo y.
7. Clique em “Compartilhar Gráfico” e copie o link da web para aplicá-lo na tela. **“Imprimir Atividade de Design”**.

Exemplos:

Como preencher com cores no Desmos



No site do Desmos existem duas opções: a de compartilhar o link (copiar para incorporar em qualquer outro documento ou aplicativo) e a de baixar como imagem (exportar gráfico).

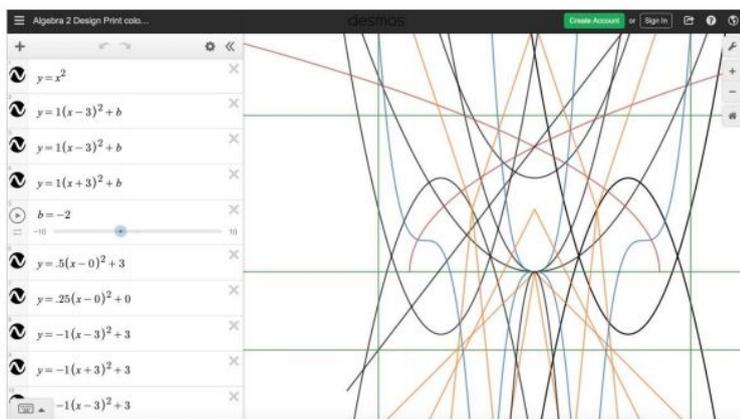
realização:



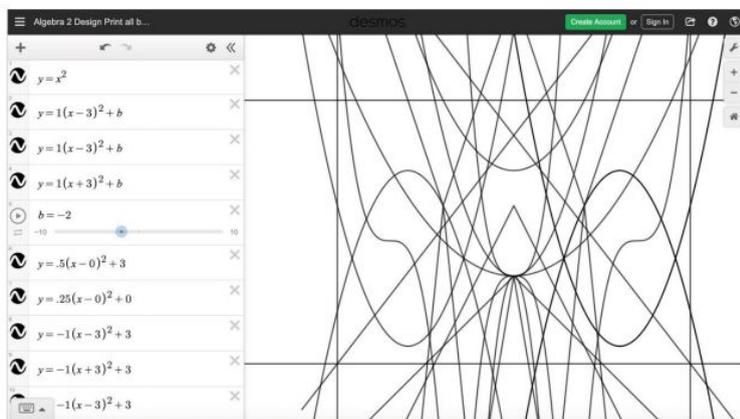
apoio:



Exemplo de Diarra colorido por famílias de funções



Exemplo final de Diarra



realização:



apoio:



Rubrica

Resultados de Aprendizado	Acima do esperado	Esperado	Quase o Esperado	Inicial
<p>Transformações algébricas</p> <p>O aluno é capaz de mostrar conexões entre transformações variadas de gráficos-mestre e mostra entendimento do impacto dos parâmetros nas formas dos gráficos.</p>	<p>Transforma de maneira consistente mais de 3 famílias de funções, mudando todos os parâmetros (pelos menos um de cada vez).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Decide qual parâmetro é mais útil para criar as transformações de que precisa. • Muda logicamente os parâmetros para obter simetria de reflexão entre o eixo x e o eixo y. • Consegue usar as desigualdades para colorir os desenhos. 	<p>Transforma de maneira consistente todas as 3 famílias de funções, mudando todos os parâmetros (pelos menos um de cada vez),</p> <ul style="list-style-type: none"> • Decide qual parâmetro é mais útil para criar as transformações de que precisa, • Muda logicamente os parâmetros para obter a simetria de reflexão no eixo x, 	<p>Conhece mais de uma família de funções, mas não consegue criar um gráfico-mestre ou/e transformar todos os 3.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Decide qual parâmetro é mais útil para criar as transformações de que precisa. 	<p>Reconhece apenas uma função-mestre.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tem dificuldade para criar os gráficos das funções. • Tem dificuldade para conectar os valores de a, h, e k aos gráficos.
<p>Design Artístico</p> <p>O design geral é esteticamente agradável, autêntico e original.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • O aluno consegue criar com precisão um design com intersecções o suficiente para serem preenchidas com mais de 5 cores. • O aluno é capaz de colorir o design e aplicar um padrão final, pronto para impressão e emolduração. 	<ul style="list-style-type: none"> • O aluno consegue criar com precisão um design com intersecções o suficiente para serem preenchidas com pelo menos 5 cores. • O aluno apresenta um padrão final (similar a uma página de livro de colorir), mas não usa cores para preenchê-lo. 	<p>O aluno alcança gráficos/padrões parcialmente completos com muito poucas intersecções a serem coloridas.</p>	<p>O aluno obtém gráficos incorretos ou incompletos com poucas intersecções a serem coloridas.</p>

realização:

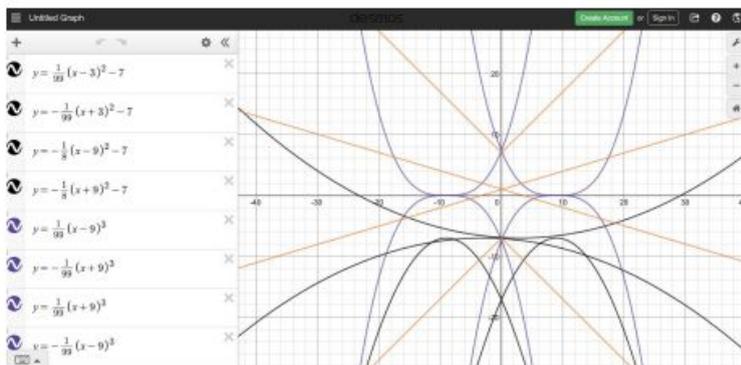


apoio:

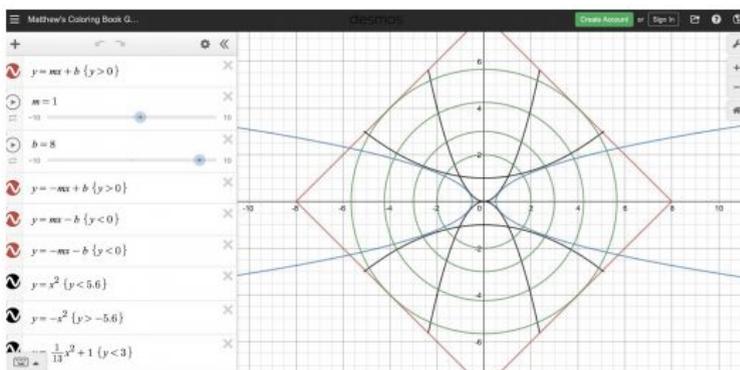


Amostra do Trabalho de um Aluno

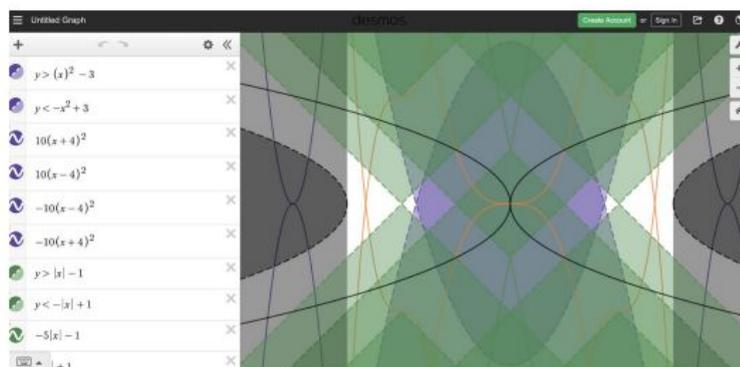
Exemplo de Aluno que está quase alcançando o esperado



Exemplo de Aluno que atende ao esperado



Exemplo de Aluno que está acima do esperado



Extensões

Ver Segmento 7 do Apêndice & Recursos no final do documento: Moda, Arte, Tecidos, Interiores

realização:



apoio:



Transformando gráficos de funções para criar arte

Apêndice & Recursos

Conexões ao conteúdo matemático, práticas do Common Core⁴ e objetivos de linguagem acadêmica.

Objetivos do Conteúdo Matemático	Objetivos da Linguagem Acadêmica	Práticas Matemáticas do Common Core	Habilidades da BNCC - anos finais do EF2 e EM
<p>Modificar, estender, comprimir, e virar o gráfico de</p> $f(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=x^3$ $f(x)= x $ $f(x)=\frac{1}{x}$ $f(x)=b^x$ $x=y^2$ e $x^2+y^2=r^2$	Compressão vertical, mudança horizontal.	<p>Modelar com Matemática.</p> <p>Atender à precisão.</p> <p>Buscar e expressar regularidade no raciocínio repetido.</p>	<p>7º ano (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.</p>
Escrever a expressão geral de uma família de funções, usando a, h, e k	Explicar o que é um “parâmetro de uma equação” e descrever quais parâmetros ele está mudando para gerar as mudanças que busca fazer em seu design.	<p>Modelar com Matemática.</p> <p>Atender à Precisão.</p>	<p>8º ano (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.</p>
Produzir gráficos de funções sem uma calculadora, usando o gráfico-mestre e aplicando transformações geométricas a partir	Ao descrever seu trabalho para os colegas ou professores, usar corretamente	<p>Modelar com a Matemática.</p> <p>Atender à precisão.</p>	

⁴ Nota da revisora técnica (equipe Mentalidades Matemáticas Brasil): O Common Core americano equivale à BNCC brasileira, que orienta as aprendizagens que devem ser desenvolvidas pelos alunos de todo o país.

realização:



apoio:



de sua compreensão de a, h e k para cada família de funções.	os termos a seguir: reflexão, translação, rotação.	Entender os problemas e perseverar em sua resolução. Buscar e usar a estrutura.	<p>9º ano (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.</p> <p>ENSINO MÉDIO (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).</p> <p>(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.</p> <p>(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma</p>
Transformar expressões algébricas em gráficos usando técnicas como completar o quadrado e fatorar.		Modelar com a Matemática. Atender à Precisão.	
Modelar matematicamente os gráficos-mestre e suas transformações.		Modelar com Matemática. Atender à precisão. Buscar e fazer uso de estrutura.	

realização:



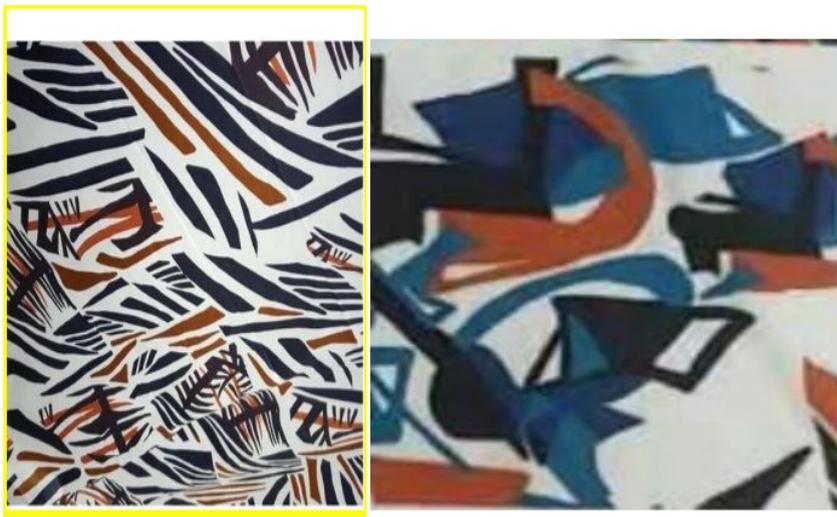
apoio:



			variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
--	--	--	---

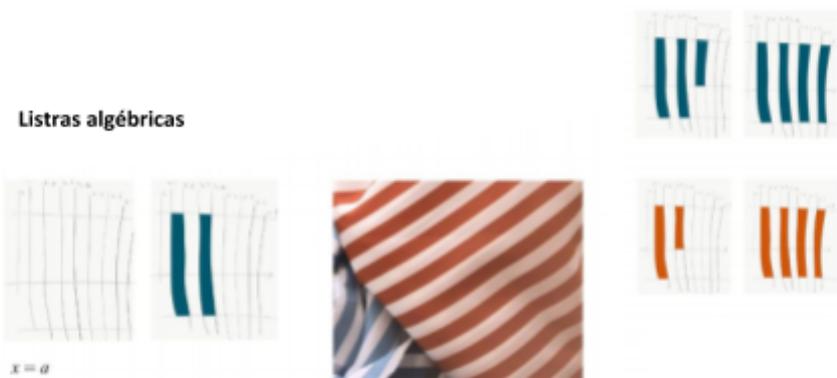
Etapa 1 - Recurso

Imagens de tecidos, ou tecidos de verdade, para mostrar durante o aquecimento



Etapa 2 - Recurso

Exemplos de designs lineares



realização:



apoio:





realização:

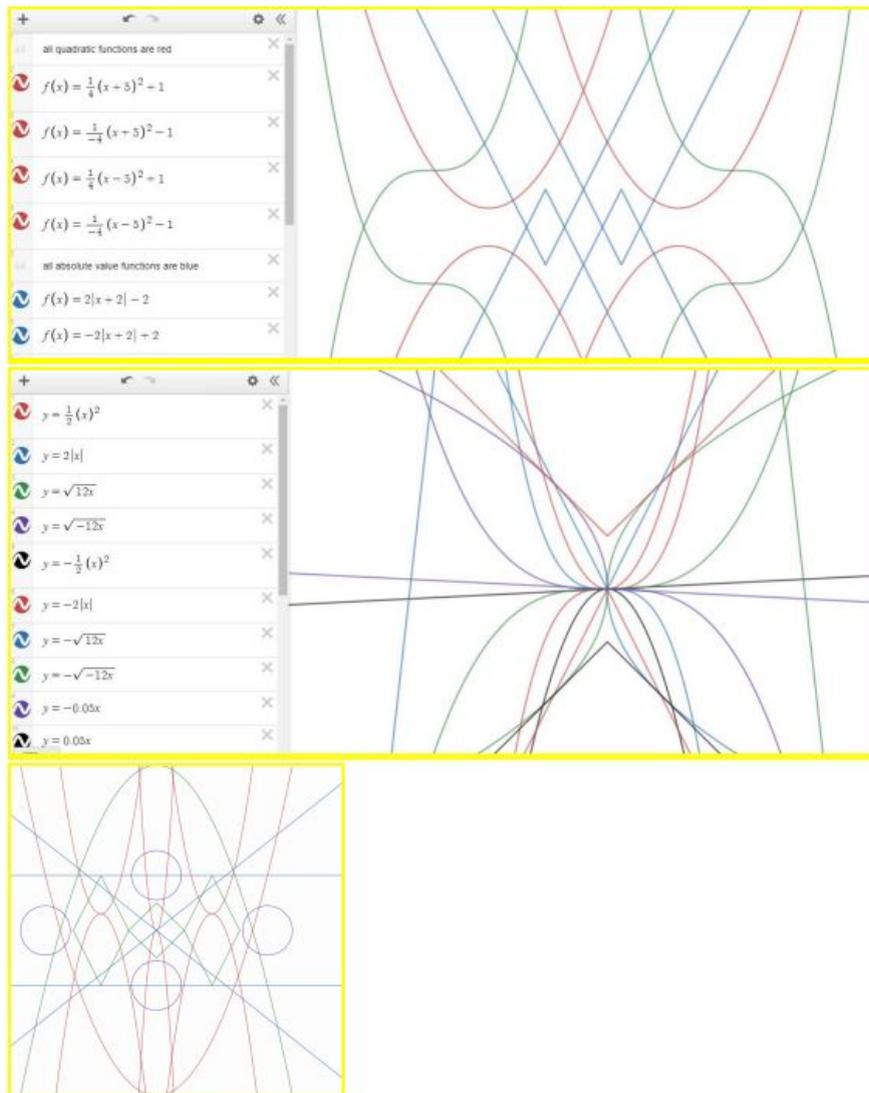


apoio:



Etapas 3, 4, 5 - Apêndice

Exemplos de trabalho do aluno



realização:

Instituto Sidarta



apoio:

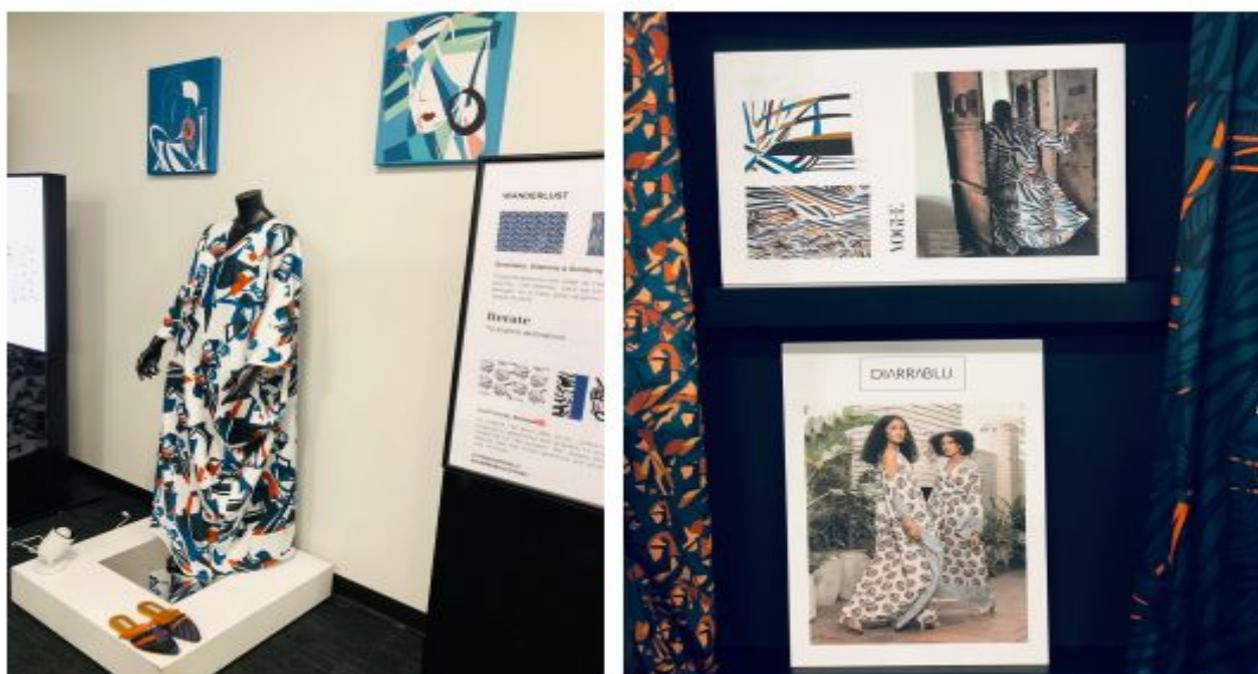
Itaú Social

Etapa 7 - Recurso

Extensões / Aplicações à moda, arte, tecidos e interior



Usando transformações Algébricas para criar pinturas e livros de colorir



Usando Transformações Algébricas para criar pinturas e fazer designs de tecidos, roupas e sapatos

realização:

Instituto
Sidarta



apoio:

Itaú Social