



## Conjunto Ternário de Cantor Semana 4 – Dias 3, 4 & 5

### Introdução

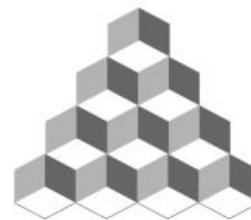
Nesta atividade, os alunos vão explorar padrões exponenciais. Eles farão isso por meio do Conjunto Ternário de Cantor, objeto matemático que há mais de um século tem sido explorado e debatido pelos matemáticos. Os alunos vão criar suas próprias perguntas sobre esse conjunto curioso, e explorá-las a fundo. Quem sabe até esbarrem com a infinitude aqui ou acolá?

### Programa do dia

Atividade	Tempo	Descrição/Pontos
<b>Lançar</b>	30 min	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Observem a representação visual do Conjunto Ternário de Cantor. Como vocês o veem? As respostas podem ser coletadas ao estilo de uma conversa numérica.</li> <li>• Depois, a turma pode fazer um brainstorm de perguntas em relação aos padrões e seu crescimento. Alguns exemplos são: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Quantas retas pretas haverá na 10ª fileira?</li> <li>• Qual o comprimento total das retas pretas na fileira de número <math>n</math>?</li> <li>• Será que em algum momento haverá uma fileira sem retas pretas?</li> <li>• Quantos espaços brancos existem em qualquer fileira?</li> </ul> </li> </ul>
<b>Explorar 1</b>	20+ min	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convide a turma a se separar em pequenos grupos para tentar responder às perguntas que surgiram no brainstorm acima.</li> </ul>
<b>Explorar 2</b>	50+ min	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (OPCIONAL) Apresentar o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger como generalizações do Conjunto Ternário de Cantor.</li> <li>• Estimule os alunos a representar as respostas à cada pergunta de várias formas diferentes para mostrá-las ao resto da turma mais tarde.</li> </ul>
<b>Discutir</b>	50+ min	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convide os alunos a apresentar suas perguntas e respostas ao resto da turma, bem como a expandir as ideias uns dos outros.</li> </ul>
<b>Refletir</b>	5 min	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Como o crescimento deste padrão é diferente dos que você já explorou até agora?</li> </ul>

### Ao Professor

Esta atividade convida os alunos a explorar o crescimento exponencial por meio do Conjunto Ternário de Cantor. Várias de suas partes crescem exponencialmente, como a quantidade de segmentos brancos e pretos em cada fileira e o comprimento total desses segmentos, então nós queremos dar aos alunos a chance de criar suas próprias perguntas em relação ao conjunto e explorá-las. Isso lhes dá a oportunidade de explorar um objeto matemático, o Conjunto Ternário de Cantor, que alguns matemáticos usam em seu trabalho. Caso eles tenham interesse, existem muito mais



informações online em relação à história do trabalho de Cantor e os usos desse conjunto.

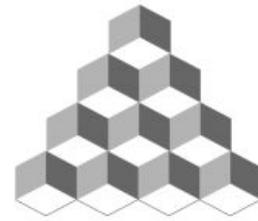
Para seu conhecimento, mas você não deve repassar isso para os alunos, pois eles terão a oportunidade de descobrir: o Conjunto Ternário de Cantor é construído quando pegamos um segmento de reta e removemos seu terço médio (o que significa tudo o que esteja entre, mas sem incluir, o ponto  $1/3$  e o ponto  $2/3$ ), e então aplicar o mesmo processo para cada segmento em cada fileira inferior. Isso pode se tornar importante se os alunos fizerem perguntas relacionadas à precisão, mas nós os incentivamos a ver o padrão de qualquer forma que faça sentido para eles, mesmo que não seja a mesma forma como ele foi construído.

Tenha em mente que essa será a primeira vez que eles vão ver e explorar uma função exponencial. Considerando-se que essa é a primeira vez que veem funções exponenciais, muitos deles não apresentarão uma expressão exponencial para esse padrão. Não há problema algum nisso. Deixe-os investigar, descobrir e mostrar uns aos outros o que encontraram.

### Lançar

Projete a imagem do Conjunto Ternário de Cantor e pergunte o que eles veem e como veem o padrão crescendo. Você pode registrar suas formas diferentes de olhar ao estilo de uma conversa numérica. Neste vídeo do Problema das Bordas, é possível ver Jo apresentando um padrão visual como se estivesse numa conversa numérica de pontos: <https://www.youcubed.org/pt-br/downloadable/problema-das-bordas/>. A atividade é voltada a ajudar os alunos a se familiarizarem com o padrão que estão prestes a explorar antes de pensarem nele de forma numérica.

Enquanto os alunos começam a conhecê-lo, mostre algumas informações sobre o padrão em si e a pessoa que está por trás dele. Ele é chamado Conjunto Ternário de Cantor em homenagem a Georg Cantor, um dos primeiros matemáticos a descrevê-lo. Cantor deu início a um ramo da matemática chamado de Teoria dos Conjuntos, que investiga “conjuntos” ou coleções de objetos. Boa parte desse trabalho foi em torno de conjuntos infinitos e ele determinou que existem “tamanhos” diferentes de infinidades. Caso isso pareça estranho para seus alunos, eles não são os únicos. Isso também pareceu estranho para muitos matemáticos dos tempos de Cantor, e naquela época seu trabalho foi bastante polêmico, mas é hoje considerado uma contribuição essencial para a matemática. O Conjunto Ternário de Cantor é um exemplo que Cantor usou para pensar nas propriedades de conjuntos infinitos e os alunos podem acabar explorando algumas delas à medida que perguntas forem lhe ocorrendo em relação ao Conjunto Ternário de Cantor e a forma de seu crescimento.



Após apresentar o padrão, solicite que façam um brainstorm de perguntas sobre o padrão e seu crescimento. Crie uma lista de todas as perguntas que os alunos formularem, fixando-a num local em que você possa deixá-las à vista durante toda a atividade. Pode ser numa área do quadro ou em folhas de cartolina. Estimule os alunos a fazer o máximo de perguntas possível, pois assim terão uma gama variada a explorar. Eles também vão continuar a acrescentar perguntas a essa lista enquanto forem trabalhando e fazendo novos questionamentos.

Alguns exemplos das perguntas que podem surgir são:

- Quantas retas pretas haverá na 10ª fileira?
- Qual o comprimento total das linhas pretas na nª fileira?
- Será que em algum momento haverá uma fileira sem nenhuma reta preta?
- Quantos espaços brancos existem em qualquer fileira?

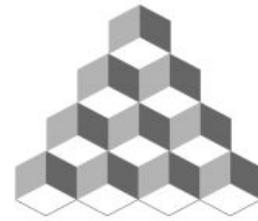
### Explorar Parte 1

Organize os alunos para trabalharem em pequenos grupos. Eles têm à disposição um menu de investigação criado a partir de todas as perguntas que formularam com a turma. Cada grupo pode se debruçar sobre qualquer pergunta que quiser pelo tempo que achar produtivo e interessante. Eles não precisam responder a uma pergunta totalmente para seguir adiante, mas é valioso que documentem seu raciocínio mesmo com soluções parciais às perguntas que estão tentando solucionar. Durante o trabalho, outras perguntas podem surgir e eles devem acrescentá-las ao banco de perguntas de toda a turma. Incentive-os a trabalhar de modo visual e a fazer perguntas que exijam a visualização, pois as representações visuais são parte essencial do raciocínio matemático, e que é muitas vezes esquecido.

### Explorar Parte 2

Nesta próxima exploração, você pode decidir se quer oferecer aos alunos mais alguns padrões relacionados para reflexão, ou se apenas vai apenas deixá-los continuar a desenvolver o trabalho que começaram na sessão anterior. Mesmo que você de fato apresente os novos padrões, é bom dar aos alunos a escolha de continuar a trabalhar no padrão original.

A segunda página de projeção abaixo traz imagens de dois objetos matemáticos relacionados à representação visual do Conjunto Ternário de Cantor, o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger. Mostre-os e diga que elas geralmente são chamadas de generalizações do Conjunto Ternário de Cantor. Você pode deixar os alunos explorá-los, bem como a pergunta: “O que significa que eles sejam chamados de generalizações do Conjunto Ternário de Cantor? Como veem que eles estão conectados?”. Convide-os a observar se as conjecturas que fizeram enquanto estavam focados no Conjunto Ternário também se aplicam a essas outras representações visuais. Incentive-os a preparar um cartaz/imagem que mostre como eles veem as



generalizações do Conjunto Ternário de Cantor representadas no Tapete de Sierpinski e na Esponja de Menger.

Independentemente de você escolher ou não apresentar as representações visuais adicionais, peça aos alunos que representem suas descobertas para cada pergunta de várias formas diferentes, como em expressões, gráficos, imagens, etc., e criem códigos de cores para elas. Eles devem colocá-las num cartaz, que será exibido para o resto da turma mais tarde.

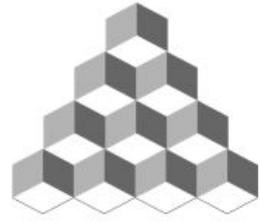
### **Discutir**

Após conceder bastante tempo para os alunos explorarem algumas perguntas diferentes, convide-os a apresentar as perguntas e respostas ao resto da turma. Nós escolhemos dar 50+ minutos para essa fase, pois queremos que a turma se torne uma verdadeira comunidade de matemáticos, na qual eles não apenas têm tempo para apresentar respostas finalizadas de seu trabalho na fase de exploração, mas também de apresentar conjecturas e soluções parcialmente formadas. Durante esse momento, eles podem expandir o trabalho uns dos outros. Enquanto os grupos apresentam, você pode manter um registro das diferentes conjecturas e dos trabalhos ainda não finalizados que foram apresentados. Diferentes grupos podem expandir o trabalho de grupos que estiverem se apresentando, pois podem ter explorado ideias similares. É importante ter em mente, no entanto, que nem todas as perguntas levantadas precisam ser respondidas. Não faz mal deixar algumas perguntas abertas para que os alunos fiquem com elas e, quem sabe, as explorem no futuro.

Caso os alunos estejam tendo dificuldades para encontrar ou mostrar métodos, não há problema em apresentar um método e mostrá-lo para eles. Recomendamos que você faça isso dizendo que o método que está mostrando veio de outro aluno. Essa é uma mensagem importante para eles e um momento no qual não devem vê-la como a especialista.

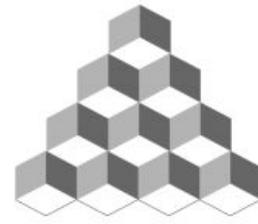
### **Refletir**

Solicite que reflitam sobre sua experiência em seus cadernos respondendo à seguinte pergunta: “Como o crescimento desse padrão é diferente dos outros que vocês exploraram até agora?”.



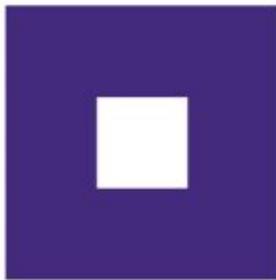
# Conjunto Ternário de Cantor



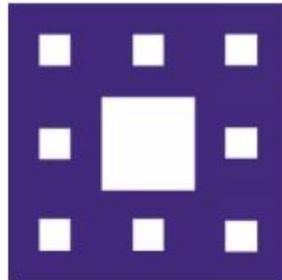


# Tapete de Sierpinski

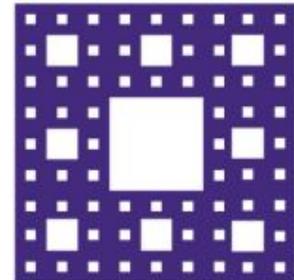
Caso 1



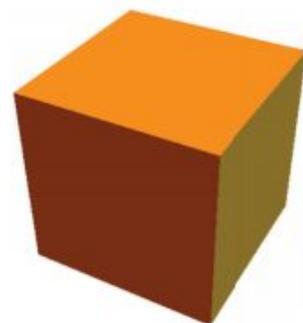
Caso 2



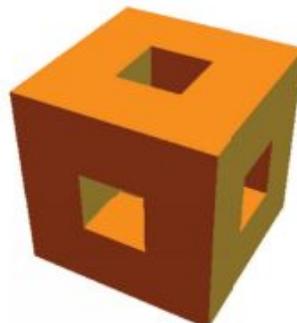
Caso 3



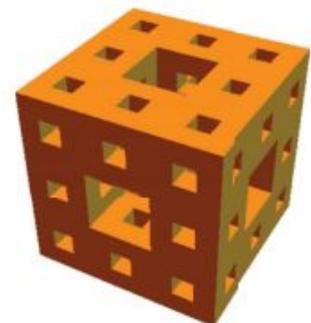
# Esponja de Menger



Caso 1



Caso 2



Caso 3

Imagens do Tapete de Sierpinski por KarocksOrkav, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=33661510>  
Imagens da Esponja de Menger criadas por Mattcomm, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=45463775>