PROVE PARA MIM!

Envolva seus alunos por meio de atividades que comprovadamente promovem o raciocínio e a resolução de problemas de forma significativa, colocando-os em contato com muitas das Práticas de Ensino de Matemática, da publicação *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Essas atividades são discutidas neste artigo, outro episódio da série.

O raciocínio e a resolução de problemas são atos críticos na aprendizagem matemática. Eu conheci muitos professores que me disseram que gostariam de destacá-los mais, mas sentem que não podem por conta das pressões de cobertura do conteúdo, do ritmo dos guias de ensino e das avaliações distritais. Neste artigo, eu descrevo uma intervenção de ensino que enfatizou a resolução de problemas e o raciocínio e resultou em percursos matemáticos diferentes para os alunos, estando eles nas faixas de baixo, médio ou alto desempenho. Há dois verões, eu e minha equipe do Youcubed, de Stanford, convidamos 83 estudantes do ensino fundamental II para o *campus* de Stanford para aprender matemática de forma diferente. Eu sabia, com base em muitas pesquisas, que os estudantes seriam ajudados se estivessem ativamente engajados na matemática, resolvendo problemas criativos e ricos, e se acreditassem em seu potencial (Boaler 2016; 2015). Eu não esperava, no entanto, a enorme mudança positiva que os alunos teriam no seu desempenho, nas suas crenças sobre si mesmos e no seu relacionamento com a matemática.

ESTRUTURA DO CURSO DE FÉRIAS DO YOUCUBED

Em preparação para o curso de férias do Youcubed, perguntei aos líderes distritais de matemática se poderiam encontrar estudantes que tivessem desenvolvido ideias negativas sobre si mesmos e sobre matemática. Eles me garantiram que podiam e enviaram os detalhes do curso aos professores desses alunos. O curso era gratuito, realizado no *campus* de Stanford, e oferecia transporte gratuito de ônibus de ida e volta para os estudantes todos os dias. De manhã os alunos trabalhavam com a matemática em quatro salas de aula diferentes; à tarde eles formavam grupos de cerca de 20 alunos e passavam tempo com os estudantes de Stanford, vendo diferentes partes do *campus* e participando de atividades como jogar caça ao tesouro e fotografar. Todos os 83 alunos que vieram até nós naquele verão disseram a um pesquisador quando chegaram que "não eram uma pessoa de matemática". Eles podiam mencionar a única pessoa em sua classe que pensavam *ser* uma "pessoa de matemática": o aluno que levantou primeiro a mão quando uma pergunta foi feita. Os alunos mantinham essa crença falha, embora tivessem diferentes níveis de

BOALER, J. (2019). Prove it to me! *Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia (EUA): NCTM, vol. 24, no. 7, pp. 422-428. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/05/prove-it-to-me-JB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2019.

desempenho. A **Tabela 1** mostra o gênero e a etnia dos estudantes. O mito de que ser rápido em matemática é importante foi um dos muitos que afastamos para os alunos. Também compartilhamos com eles a nova e importante neurociência, mostrando o seguinte:

1. Ninguém nasce com ou sem cérebro de matemática; o cérebro pode crescer e mudar para aprender qualquer nível de matemática escolar.
2. Cometer erros e se esforçar são os melhores momentos para o cérebro crescer.
3. Pensar visualmente e fazer conexões entre diferentes representações é importante para as conexões e o crescimento do cérebro.

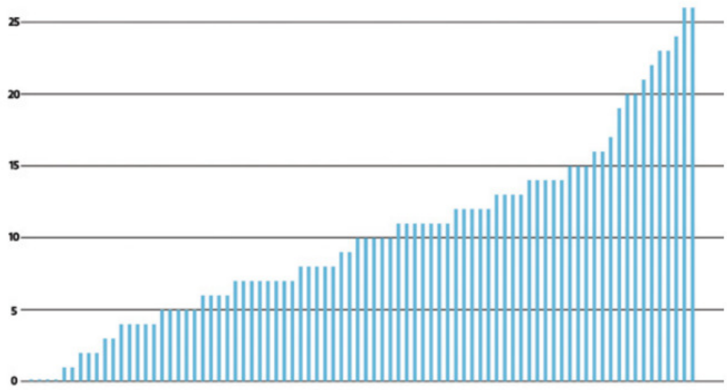
Tabela 1. Os participantes do curso mostrariam melhorias, independentemente do sexo e etnia.

Etnia e Gênero	Meninas	Meninos
Asiático	8	6
Afro-americano	1	0
Filipino	9	5
Latino	10	9
Nativo do Havaí/Ilhas do Pacífico	1	2
Branco	7	4
Diverso racialmente (2 ou mais)	9	12
Total	**45**	**38**

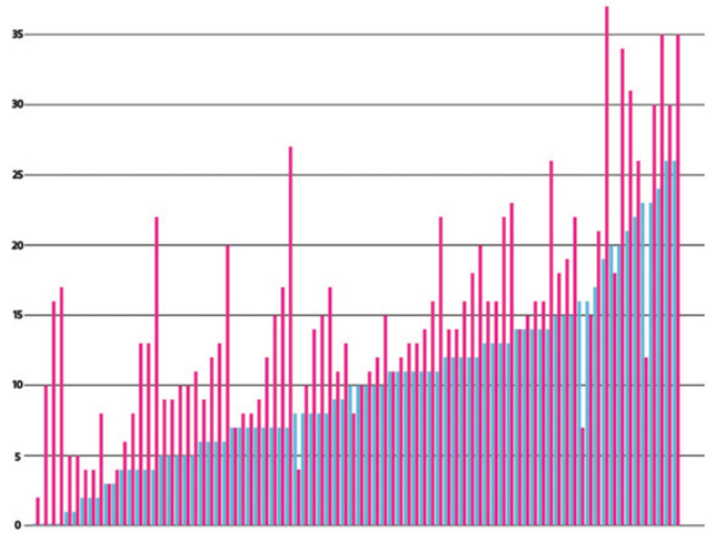
Nas dezoito aulas seguintes, ensinamos os alunos com atividades abertas, criativas e que promoviam o raciocínio e a resolução de problemas. Ao final das dezoito aulas, a melhoria das notas dos alunos nos testes padronizados era equivalente a 2,8 anos escolares. Apesar da diversidade do conjunto de alunos que participaram do curso, uma análise de regressão mostra que a melhoria no desempenho não se diferenciava por gênero ou por grupo étnico (ver **fig. 1**). Você pode assistir a um vídeo curto que mostra a abordagem em www.youcubed.org/pt-br/. O currículo que usamos em nosso curso de férias está disponível para aqueles que participam de nossos workshops em Stanford, e nosso site (https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/) compartilha muitas dessas atividades, disponíveis gratuitamente para qualquer pessoa.

BOALER, J. (2019). Prove it to me! *Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia (EUA): NCTM, vol. 24, no. 7, pp. 422-428. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/05/prove-it-to-me-JB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2019.

Fig. 1 A melhoria dos alunos do curso de verão do youcubed em testes padronizados é mostrada em dois gráficos. O eixo y mostra pontuações de álgebra; o eixo x mostra cada um dos 83 alunos.



Pré-teste: uma avaliação de álgebra foi aplicada antes do verão.



Pós-teste: a mesma avaliação no final do verão apresentou uma média de 50% de melhoria.

A ABORDAGEM DO CURSO DO YOUCUBED

O currículo do curso do Youcubed foi planejado em torno de quatro "Grandes Ideias" que consideramos críticas para o aprendizado de matemática dos alunos (ver **fig. 2**). Muitas das ideias e métodos menores surgiram naturalmente quando ensinamos à luz das Grandes Ideias. (Veja também https://tinyurl.com/bigideaspaper, um artigo que mostra grandes ideias para toda Educação Infantil e Ensino Fundamental).

Queríamos ensinar aos alunos como generalizar e usar a álgebra como uma ferramenta de resolução de problemas, e introduzimos essas ideias por meio de atividades com padrões visuais. Incentivamos os alunos a trabalharem para estabelecer conexões entre as representações visuais e os números,

BOALER, J. (2019). Prove it to me! *Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia (EUA): NCTM, vol. 24, no. 7, pp. 422-428. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/05/prove-it-to-me-JB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2019.

estimulando, assim, as conexões cerebrais. Também lembramos aos alunos a importância de desenvolver conexões cerebrais vendo a matemática de diferentes maneiras:

visualmente, numericamente, algebricamente, verbalmente e de forma tabular ou pictórica. Quando os alunos achavam o trabalho difícil, nós os incentivamos com outras neurociências, dizendo que os momentos de esforço são os mais importantes para o nosso cérebro.

Para ajudar os alunos a aprender a raciocinar matematicamente ao resolver problemas, fornecemos não apenas atividades que incentivavam resolução e raciocínio, mas também ensinamos maneiras de raciocinar uns com os outros. Dissemos aos alunos que o raciocínio é um ato intrinsecamente matemático. Enquanto os cientistas provam hipóteses encontrando evidências confirmatórias ou não confirmatórias, os matemáticos provam conjecturas pelo raciocínio - falando sobre por que os métodos são escolhidos, como eles funcionam e como eles se vinculam, descrevendo as conexões lógicas entre eles. Costumo encontrar pais de alunos de alto desempenho que me perguntam: "Por que os alunos devem explicar suas resoluções quando podem simplesmente obter a resposta?" Minha resposta é sempre a mesma: explicar a resolução é o que chamamos de raciocínio matemático e se os alunos não estão raciocinando, não estão sendo matemáticos. Em conversas com Conrad Wolfram, líder do Wolfram-Alpha, o mecanismo de conhecimento computacional, ele me disse que estava interessado em empregar apenas pessoas que possam se comunicar matematicamente e raciocinar sobre suas ideias. Pessoas que só conseguem chegar a soluções não são produtivas em equipes de pessoas que trabalham com matemática de alto nível.

Estudantes raciocinam - com representação visual - para resolver 1 dividido por 2/3.

Para incentivar os alunos a raciocinar uns com os outros, ensinamos a eles o protocolo dos céticos que aprendi com Cathy Humphreys. Dissemos aos alunos que era realmente bom convencer e que o nível mais fácil de convencer é convencer-se de algo, o próximo nível é convencer um amigo e o nível mais alto e mais difícil é convencer um cético (veja a **fig. 3**).

BOALER, J. (2019). Prove it to me! *Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia (EUA): NCTM, vol. 24, no. 7, pp. 422-428. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/05/prove-it-to-me-JB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2019.

Fig. 2 Muitas ideias e métodos menores surgiram naturalmente quando ensinamos à luz das Grandes Ideias, em torno das quais planejamos o currículo do curso.

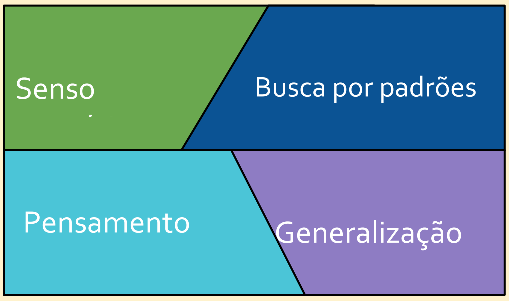
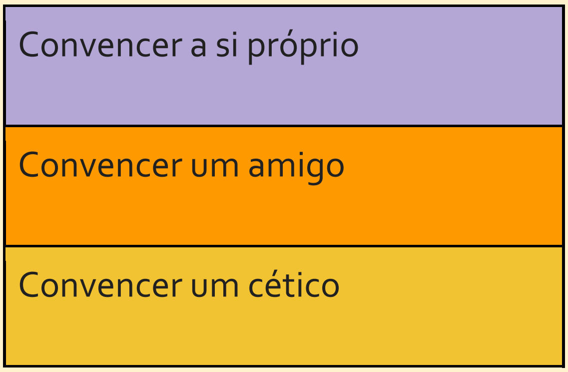


Fig. 3 No protocolo dos céticos de Humphreys, o nível mais fácil de persuasão é convencer a si próprio.



Depois, pedimos aos estudantes que fossem céticos e sugerimos que eles fizessem perguntas quando os outros explicavam seu pensamento:

- Como você sabe que isso funciona?
- Por que você usou esse método?
- Você pode provar isso para nós?

Os alunos adoraram o papel do cético e o assumiram prontamente, e os professores viram imediatamente mudanças positivas no ambiente de ensino. Os alunos se desafiavam de uma maneira amigável e brincalhona para "provar isso". Os alunos, então, raciocinavam de forma mais completa. Os dois alunos abaixo refletem sobre o papel do cético, brincando entre si sobre a prova matemática:

Int.: Então, o que foi preciso para que o curso de férias tivesse sucesso?
TJ: Ser capaz de se comunicar com seu parceiro à medida que avança.
José: E ser capaz de mostrar representações visuais, não apenas números.
TJ: Ser capaz de explicar bem as coisas.
José: E então alguém diz: "Como" ou "Por que" ou...
TJ e José: Prove! [Rindo].
José: Uh, o que, o que é isso chamado, hum...
TJ: Pergunta cética.
José: Sim, cé..., sim, cética.
Int .: E o que isso significa, e como é isso?
TJ: É divertido ser (cético).
José: [Risos]

BOALER, J. (2019). Prove it to me! *Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia (EUA): NCTM, vol. 24, no. 7, pp. 422-428. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/05/prove-it-to-me-JB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2019.

Int: Você pode explicar?
TJ: Porque, assim, ajuda a outra pessoa que não está sendo cética...
José: A pensar no problema.
TJ: Sim. Por exemplo, se Carlos dissesse, tipo, "isso é um quadrado", e eu sou (o cético), então, "Prove isso".
José: Mmm, tem tudo, hum, tudo bem, tem todos os lados iguais e todos, e todos os ângulos são de 90 graus.
TJ: Por quê?
José: Porque é.
TJ: Prove isso!
José: É! [Risos]
TJ: [Risos]
José: Eu já provei isso.

No início, José brinca com TJ dizendo "porque é", mas depois ele lembra a TJ que ele já havia provado isso com sua afirmação matemática ("tem todos os lados iguais e todos os ângulos são de 90 graus").

Uma atividade que usamos para ensinar a resolver problemas e raciocinar nós adaptamos (veja a **fig. 4**) de uma atividade de Mark Driscoll e a compartilhamos em nosso site: https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/dobraduras-de-papel/. Driscoll criou uma atividade adorável, apreciada por muitos alunos e professores com quem trabalho, na qual os alunos são convidados a fazer dobraduras para mostrar propriedades geométricas em questões cada vez mais difíceis. Adaptamos um pouco a atividade de Driscoll, sugerindo que os alunos trabalhem em duplas e se revezem fazendo as dobraduras/raciocinando ou sendo o cético que faz perguntas e leva o outro aluno a raciocinar em níveis mais altos. Os alunos gostam de revezar-se à medida que avançam nas perguntas, seja para dobrar o papel e raciocinar ou para ser o cético.

Quando apresentamos a atividade aos alunos, modelamos explicitamente para eles o tipo de perguntas que um cético pode fazer para incentivar níveis mais altos de raciocínio. Nós os desencorajamos a simplesmente aceitar que o parceiro havia provado a construção da forma e, em vez disso, sugerimos que fizessem perguntas como: "Como você sabe que é um triângulo igual?"
Qualquer atividade ou questão de matemática pode ser adaptada para promover o raciocínio. Pode-se pedir aos alunos que calculem 1 dividido por 2/3, ou pode-se pedir para mostrarem uma prova visual de sua solução para 1 dividido por 2/3 (Boaler e Humphreys, 2005). Na primeira versão da pergunta, os alunos estão realizando um cálculo; na segunda, estão desenhando, que é uma parte importante do pensamento matemático (ver Boaler et al. 2016), e raciocinando sobre suas ideias.

Fig. 4 Lista com as instruções da tarefa de Driscoll.

Para cada parte do problema, comece com uma folha quadrada de papel e faça dobras para construir uma nova forma. Em seguida, explique como você sabe que a forma que você construiu tem a área especificada.

1. Construa um triângulo com exatamente 1/4 da área do quadrado original. Convença o seu parceiro que ele possui 1/4 da área.

2. Construa outro triângulo, também com 1/4 da área, que não seja congruente ao primeiro que você construiu. Convença o seu parceiro que ele possui 1/4 da área.

3. Construa um quadrado com exatamente 1/2 da área do quadrado original. Convença seu parceiro de que é um quadrado e que tem 1/2 da área.

4. Construa outro quadrado, também com metade da área, que seja orientado de maneira diferente daquele que você construiu no item 3. Convença seu parceiro de que ele possui 1/2 da área.

RACIOCÍNIO E EQUIDADE

Em diferentes estudos, descobri que o raciocínio desempenha um papel importante na promoção da equidade. Isso ocorre em parte porque quando os alunos falam abertamente sobre as decisões matemáticas que tomam, ajuda aqueles que têm menos certeza e diminui as lacunas entre as compreensões de diferentes alunos. Em nosso curso de férias, também descobrimos que a natureza aberta e visual das atividades nas quais os alunos estavam envolvidos aumentava as oportunidades de trabalho equitativo em grupo. Os professores geralmente se preocupam quando os alunos não se envolvem igualmente no trabalho em grupo e alguns acabam fazendo tudo, enquanto outros não fazem nada ou são excluídos. Isso não aconteceu no nosso trabalho em grupo, pois os alunos iniciaram cada tarefa perguntando uns aos outros: "Como você vê isso?" Eles percorreram o grupo, descobrindo como os diferentes membros do grupo viam a matemática. Isso ajudou todos os alunos a se sentirem incluídos e investidos no trabalho em grupo que se seguiu. Eu sempre compartilhei com os alunos que uns dos aspectos mais importantes e bonitos da matemática são a diversidade de maneiras de ver a matemática e de resolver problemas. Como professores, sempre valorizamos diferentes abordagens, estratégias, métodos e representações visuais para que os alunos aprendessem a valorizar as diferentes maneiras que todos os membros de seu grupo viam e resolviam as atividades.

À medida que os alunos compreendem as diferentes maneiras pelas quais as pessoas veem e resolvem problemas, em vez de pensar rapidamente ou corrigir respostas, eles começam a valorizar seus colegas, qualquer que seja seu desempenho anterior. Em outros lugares, eu me referi a isso como "equidade relacional" (Boaler 2006). Os alunos mudaram suas perspectivas ao longo do curso de férias, mudando de ideia sobre seu próprio potencial e sobre a natureza da matemática. Eles começaram a se ver capazes, e viam seu papel na matemática como
solucionadores de problemas, pessoas que exploravam conjecturas e ideias e raciocinavam sobre elas.

BOALER, J. (2019). Prove it to me! *Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia (EUA): NCTM, vol. 24, no. 7, pp. 422-428. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/05/prove-it-to-me-JB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2019.

Recursos que estimulam o raciocínio e a resolução de problemas
A lista a seguir de sites úteis fornece algumas possibilidades adicionais de resolução de problemas.

- www.youcubed.org
- http://www.visualpatterns.org/
- http://blog.mrmeyer.com/
- http://www.nctm.org/
- https://turnonccmath.net/
- http://map.mathshell.org/
- https://www.illustrativemathematics.org/
- http://www.estimation180.com/
- http://mathpickle.com/

DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Abri este artigo observando a mudança significativa no desempenho em matemática dos alunos depois de participarem do curso. A mudança no desempenho dos alunos ocorreu, em parte, devido a uma mudança na confiança deles, quando começaram a repensar quem eram e o que eram capazes de fazer. Esta citação de uma estudante, Selina, entrevistada no final do curso reflete as duas maneiras pelas quais os alunos mudaram suas perspectivas:

> Eles nos ensinaram como, hum, como a matemática é para todos; e eu acreditava que não era uma pessoa de matemática antes, mas agora acredito que qualquer um pode fazer matemática, e isso me ajudou muito. E também do jeito que eu pensava que a matemática era apenas sobre respostas certas e erradas; mas na verdade é realmente sobre ideias, e é muito criativa, e isso me ajudou a gostar muito mais.

Muitos professores abraçaram o movimento da mentalidade de crescimento, compartilhando com seus alunos a importância de saber que eles podem aprender e melhorar, e que o cérebro não é fixo. Mas, como apontaram a guru da mentalidade Dweck (Gross-Loh 2017) e o autor Kohn (2015), não é suficiente compartilhar essas mensagens e depois ensinar da mesma maneira de sempre. Se dissermos aos alunos que se esforcem, mas não lhes mostrarmos maneiras de obter maior acesso ou se apresentarmos a matemática como um conjunto de perguntas curtas e fechadas, corremos o risco de enviar mensagens contraditórias. Para que os alunos vejam a matemática como uma disciplina de crescimento, eles precisam de questões matemáticas por meio das quais possam crescer e que lhes ofereçam muitas maneiras de obter sucesso; isto é, perguntas que pedem aos alunos que raciocinem, desenhem, colaborem, estabeleçam conexões e aprendam. Por exemplo, 1 dividido por 2/3 pode ser uma pergunta de mentalidade fixa, na qual existe uma resposta e uma maneira de abordá-la, ou pode ser uma pergunta de mentalidade de crescimento quando os alunos são solicitados a raciocinar, visualizar e discutir suas ideias, oferecendo oportunidades de aprendizado e crescimento (ver também Boaler 2016).

Para que os alunos vejam a matemática como uma disciplina de crescimento, eles precisam de questões matemáticas por meio das quais possam crescer e que lhes proporcionem muitas maneiras de obter sucesso.

Antes de virem para o curso de férias, os alunos haviam trabalhado em salas de aula de matemática silenciosas, "recebendo" conhecimento passivamente. Quando eles foram convidados, no curso de férias, a raciocinar e dar sentido à matemática, para muitos isso foi libertador. Uma parte essencial da transição para os alunos veio dos professores que fazem da matemática, e não deles mesmos, a autoridade nas salas de aula. Quando as perguntas eram feitas, os professores não respondiam; em vez disso, pediam aos alunos que raciocinassem sobre elas, recorrendo ao seu pensamento matemático. Ao fazer isso, a sala de aula se tornou uma comunidade de aprendizes, com todos os integrantes, incluindo os professores, participando da aprendizagem como iguais. À medida que as dezoito aulas se desenvolviam, os alunos mudaram suas ideias sobre quem eles eram como pessoas e sobre seu papel no aprendizado de matemática. Essas alterações estão refletidas no desempenho dos alunos durante os dezoito dias e na melhoria das suas notas nos testes. Embora não tenhamos preparado os alunos para o conteúdo do teste, quando eles o fizeram trabalharam para dar sentido às diferentes questões e raciocinaram por meio delas, acreditando que poderiam ter sucesso.

Embora não tenhamos preparado os alunos para o conteúdo do teste, quando eles o fizeram trabalharam para dar sentido às diferentes questões e raciocinar por meio delas, acreditando que poderiam ter sucesso.

A transformação que ocorreu com os estudantes durante o verão está disponível para todos os alunos e professores, principalmente quando os professores têm oportunidades de aprender sobre a nova neurociência e têm acesso a atividades de matemática abertas e criativas que convidam os alunos a raciocinar e resolver problemas. Nosso site youcubed oferece acesso gratuito a ambos, e eu convido todos os leitores a visitar este e outros sites importantes (alguns dos quais estão listados no quadro acima). Quando fazemos essas mudanças para os alunos, isso não apenas melhora as notas nos testes, mas também muda quem eles são como pessoas. Se queremos que nossos alunos se tornem os jovens adultos que nossa sociedade precisa - aqueles que se envolvem no pensamento do século XXI, raciocinando, conectando e colaborando -, as salas de aula de matemática devem se tornar lugares em que os alunos acreditam em seu próprio potencial ilimitado e se engajam ativamente com ideias matemáticas. Essas salas de aula são mais interessantes para os alunos e para os professores. Somos todos aprendizes de matemática e todos podemos desenvolver relacionamentos ativos e investigativos com a matemática. Quando o fazemos, e a matemática se torna um espaço aberto e criativo de investigação, os aprendizes de matemática descobrirão que podem fazer qualquer coisa, e suas ideias e pensamentos matemáticos podem se estender ao céu - e além!

Jo Boaler é professora de educação matemática e co-fundadora do youcubed.

BOALER, J. (2019). Prove it to me! *Mathematics teaching in the middle school.* Reston, Virgínia (EUA): NCTM, vol. 24, no. 7, pp. 422-428. Disponível em: <https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/05/prove-it-to-me-JB.pdf>. Acesso em: 10 set. 2019.

REFERÊNCIAS

Boaler, Jo. 2008. "Promoting 'Relational Equity' and High Mathematics Achievement through an Innovative Mixed Ability Approach." British Educational Research Journal 34, no. 2 (March): 167-194.

———. 2019. O Que a Matemática Tem a Ver com Isso? Como Professores e Pais Podem Transformar a Aprendizagem da Matemática e Inspirar Sucesso. Porto Alegre: Penso.

——— . 2018. Mentalidades Matemáticas: Estimulando o Potencial dos Estudantes por Meio da Matemática Criativa, das Mensagens Inspiradoras e do Ensino Inovador. Porto Alegre: Penso.

Boaler, Jo, and Cathy Humphreys. 2005. Connecting Mathematical Ideas: Middle School Cases of Teaching & Learning. Portsmouth, NH: Heinemann.

Boaler, Jo, Lang Chen, Cathy Williams, and Montserrat Cordero. 2016. "VER PARA ENTENDER: A importância da matemática visual para o cérebro e o aprendizado." Journal of Applied & Computational Mathematics 5, no 5 (January). doi: 10.4172/2168- 9679.1000325
https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2018/05/COD12_Seeing_as_Understanding_PORTUGUESE_logo_v2GA-_1_.pdf

Driscoll, Mark. 2007. Fostering Geometric Thinking: A Guide for Teachers, Grades 5-10. Portsmouth, NH: Heinemann.

Gross-Loh, Christine. 2016. "How Praise Became a Consolation Prize: Helping Children Confront Challenges Requires a More Nuanced Understanding of the Growth Mindset." The Atlantic, Dec. 16. https://www.theatlantic.com/education/archive/2016/12/how-praise-became-a-consolation-prize/510845/

Kohn, Alfi e. 2015. "The 'Mindset' Mindset. What We Miss by Focusing on Kids' Attitudes." Alfi e Kohn [blog], August 16. http://www.alfiekohn.org/article/mindset/