

Atividades de Matemática Visual

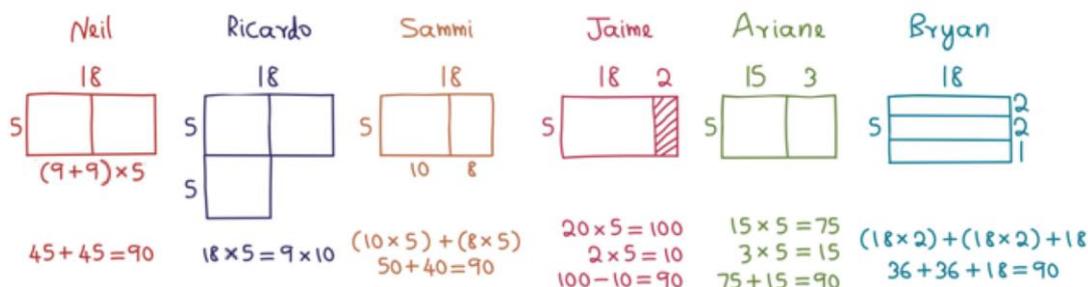
Estas atividades acompanham o artigo:

VER PARA ENTENDER: A Importância dos Recursos Visuais na Matemática para o Cérebro e o Aprendizado.



Jo Boaler, Professora de Ensino de Matemática,
com Lang Chen, do Laboratório de Neurociência Cognitiva e de Sistemas de Stanford
Cathy Williams & Montserrat Cordero, do youcubed, Universidade de Stanford.

Multiplique 18×5 e mostre a resposta com um recurso visual.



Extraído de: BOALER, Jo. Mathematical Mindsets (2016)

Quem chega mais perto de 100?

Você precisa de:

- Dois jogadores
- Dois dados
- Uma folha de atividade (veja a página a seguir).

Este jogo deve ser jogado em pares. Duas crianças compartilham uma grade em branco numa folha de papel, com 100 casas. O primeiro jogador lança dois dados. Os números que saírem são os que a criança usa para preencher um conjunto na grade. Elas podem colocar o conjunto onde quiserem, mas o objetivo é preencher a grade inteira o mais rápido possível. Depois de o jogador preencher o conjunto na grade, deve, em seguida, escrever a sentença numérica correspondente. O jogo termina quando ambos jogadores tiverem lançado os dados e não conseguirem mais colocar nenhum conjunto na grade. Quem chega mais perto de 100?

Variação:

Cada criança tem sua própria grade numérica. O jogo continua até que alguém consiga chegar o mais perto possível de 100.

De: BOALER, Jo. [Fluência sem medo](#).



QUEM CHEGA MAIS PERTO DE 100?

1. ___ x ___ = ___

2. ___ x ___ = ___

3. ___ x ___ = ___

4. ___ x ___ = ___

5. ___ x ___ = ___

6. ___ x ___ = ___

7. ___ x ___ = ___

8. ___ x ___ = ___

9. ___ x ___ = ___

10. ___ x ___ = ___

REALIZADOR



APOIADOR



O Problema da Borda

Você precisa de:

A imagem de uma grade com margens destacadas para mostrar à turma (anexa).

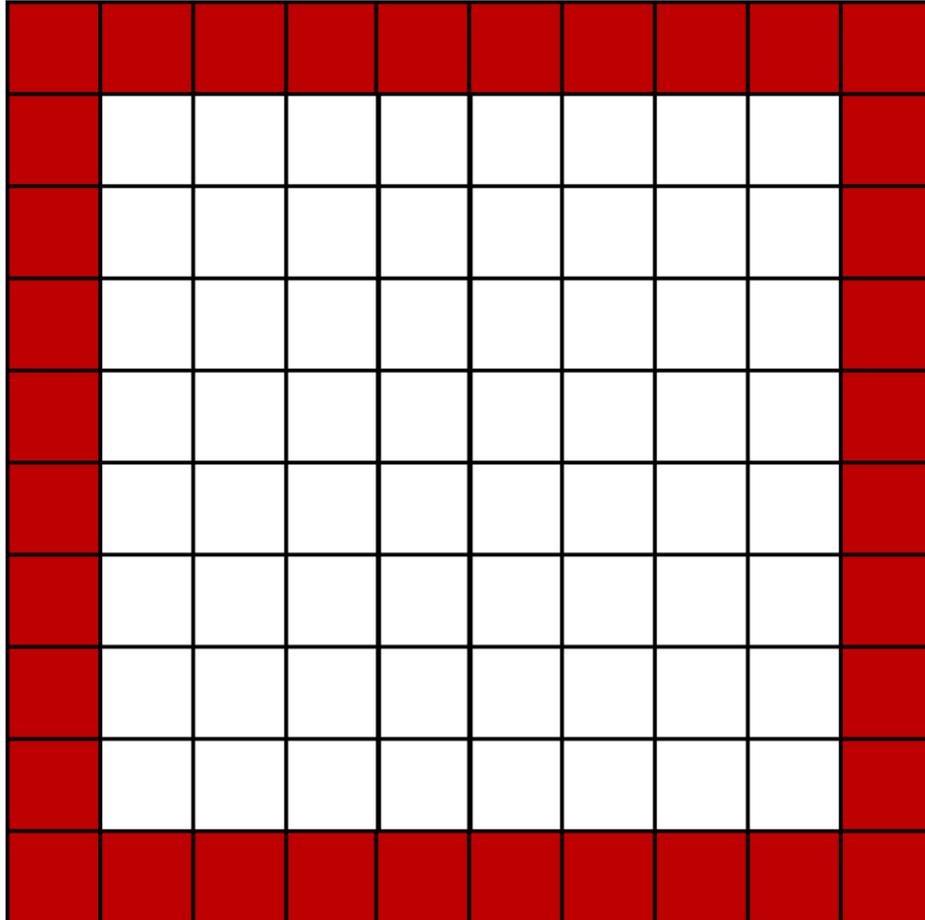
1. Mostre a imagem para toda a turma rapidamente. Informe que é uma grade de 10 por 10 e peça para calcularem o número de quadrados nas margens sem contá-los um a um. Não dê aos alunos cópias da imagem. Não deixe que a imagem fique à mostra por tempo o suficiente para eles conseguirem contar.
2. Peça aos alunos para compartilharem suas respostas com um colega, mas não mencionarem seus métodos.
3. Peça aos alunos para compartilharem seus métodos com toda a turma. Registre as respostas usando desenhos que ilustram seus raciocínios.
4. Quando todos os métodos estiverem no quadro, peça aos alunos para comparar e contrastar os diferentes métodos.

Extensões:

1. Peça que os alunos façam suas representações de forma algébrica.
2. Discuta a equivalência das expressões algébricas.
3. Peça que os alunos encolham, ou estendam, a grade e reflitam sobre as bordas de grades com diferentes tamanhos, levando a expressões algébricas.

Para obter mais detalhes sobre como implementar esse problema e ver um vídeo em que Cathy Humpreys trabalha o problema em sala de aula, veja: BOALER, J. & HUMPHREYS, C. (2005). *Connecting Mathematical ideas: Middle school video cases to support teaching and learning* (vol. 1).

O Problema da Borda



REALIZADOR



APOIADOR

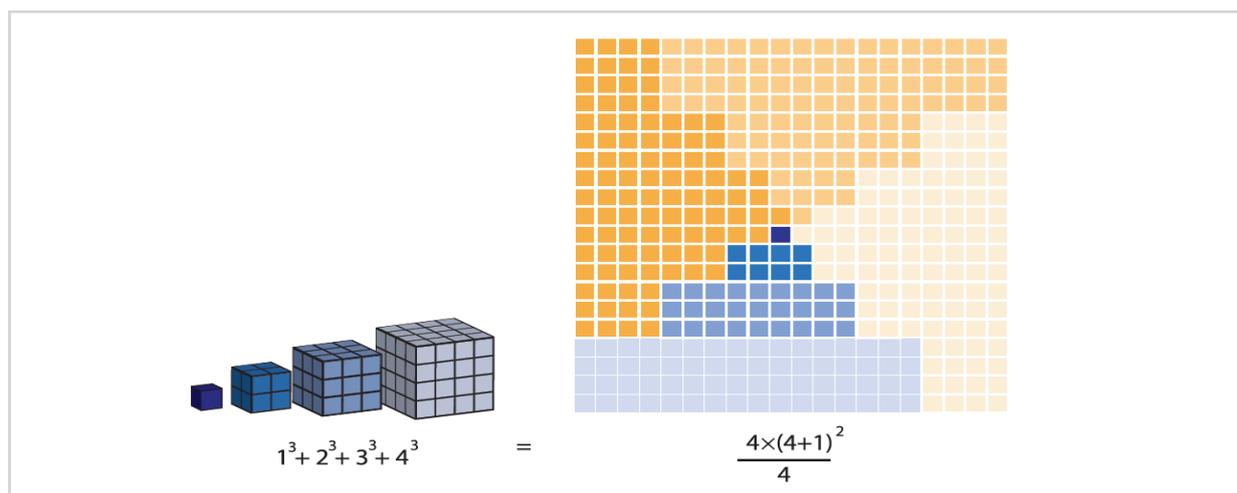
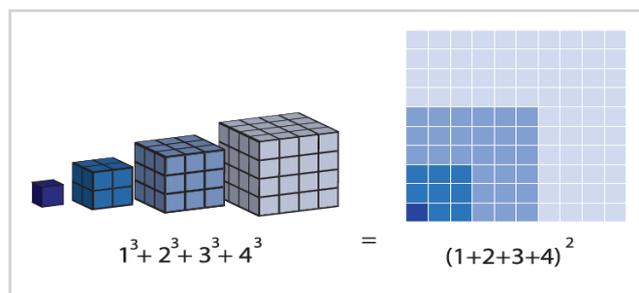
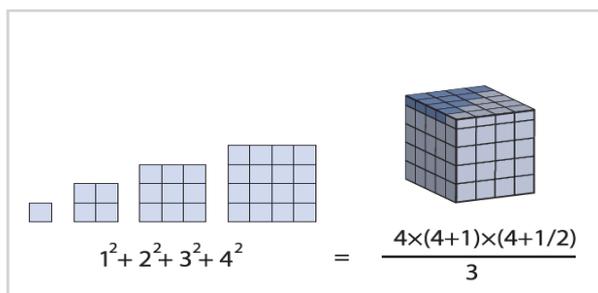
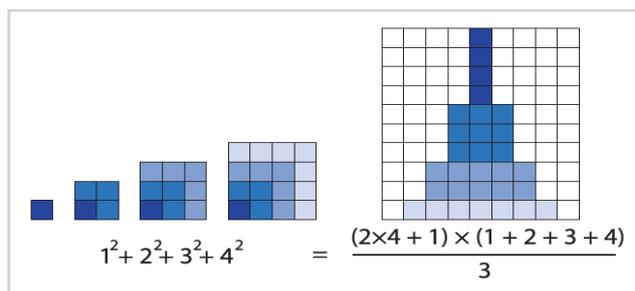
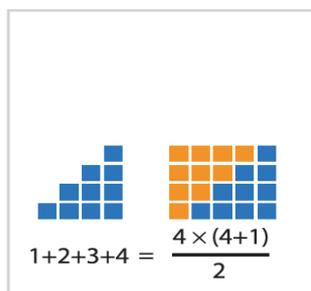
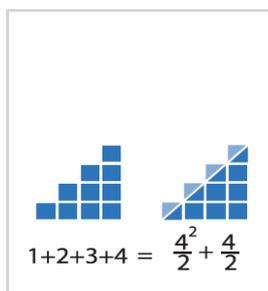


Quadrados e Cubos

Recursos visuais que Ampliam a Compreensão

Como os diagramas explicam as equações?

Como os diagramas e equações mudam à medida que mais termos, ou menos itens, são incluídos em cada série?



Problema oferecido por Gary Antonick, em: <http://wordplay.blogs.nytimes.com/tag/visual-thinking/>

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Desenhe o paralelogramo com base nos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Em seguida, desenhe sua imagem sob a transformação linear definida pela seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quais as diferenças entre eles?

O que eles ainda têm em comum?

Como você poderia mudar a matriz A para mudar cada uma dessas características na imagem?

REALIZADOR



APOIADOR



Soluções Visuais e Provas Surpreendentes com

NÚMEROS

Números ímpares

A soma de números ímpares consecutivos, começando com 1, tem um padrão único e maravilhoso!

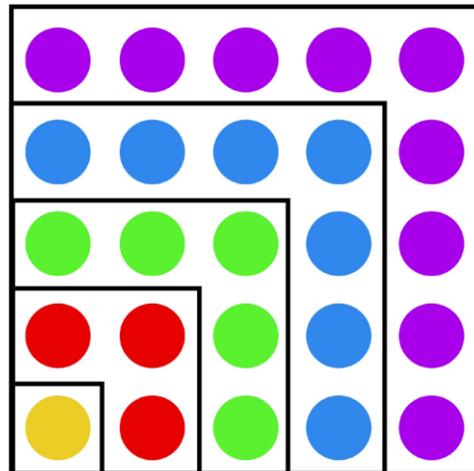
$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

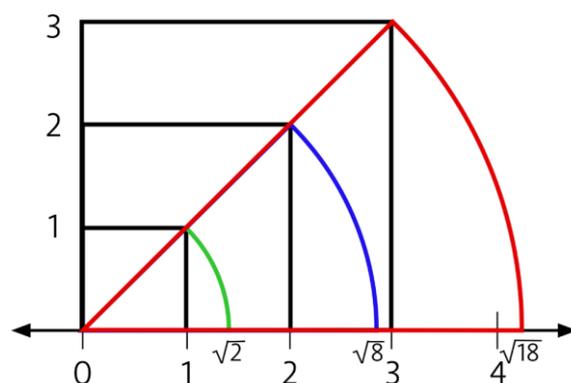
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Será que o padrão continua?



Números Irracionais

Os quadrados, suas diagonais e uma linha numérica tornam os números irracionais muito interessantes!



REALIZADOR



APOIADOR

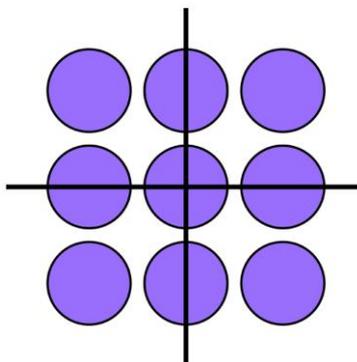
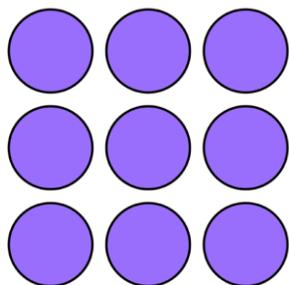


Soluções Visuais e Evidências Surpreendentes

ÁLGEBRA

O Problema do Peru

Um homem está de dieta e entra numa loja para comprar algumas fatias de peru. Ele recebe três fatias, que, juntas, pesam $\frac{1}{3}$ de um quilo, mas sua dieta o orienta a comer apenas $\frac{1}{4}$ de um quilo. Quanto ele pode comer das 3 fatias para seguir a dieta à risca?



Extraído de: BOALER, Jo. *Mathematical Mindstets*, 2016.

Parábolas 3-D

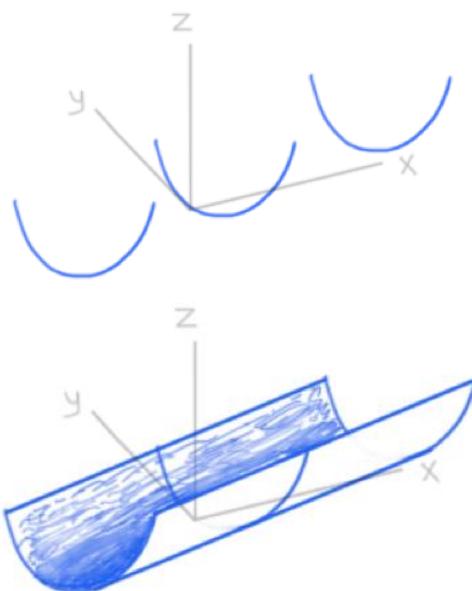
Esboce a superfície tridimensional e as curvas de nível de: $z = y^2 + x$.

Solução:

Uma vez que a dependência que z tem de x é mais simples do que sua dependência de y , nós tramamos seções transversais com três valores: $x = 0$, x negativo, e x positivo.

Perceba que o valor mínimo de cada parábola é $z = x$. Em nome da clareza visual, a figura não está desenhada em escala.

Nós observamos que a superfície é como uma parábola em (y,z) que faz um declive ao longo do eixo x . Essa forma é similar a uma pista em forma de “u” num declive para esquiadores.



REALIZADOR

APOIADOR

Uber/Lyft

Por Gary Antonick

A matemática é a ciência dos padrões e da linguagem da lógica. Nós a usamos para monitorar quantidades e padrões, como o dinheiro em nossa poupança; para criar: engenheiros e chefes dependem de planos que especificam quantidades exatas; e para tomar decisões – encontrar um jeito de confirmar nossa intuição inicial.

Estudos recentes em psicologia mostraram que nossa intuição inicial está muitas vezes completamente equivocada. Experimente este exemplo:

Uber e Lyft

Na sua cidade, existem duas empresas de transporte individual privado: Uber e Lyft. Seu pai usou um deles para voltar do aeroporto, mas esqueceu o celular no carro! Você recebe os seguintes dados:

- 85% dos transportes individuais privados na cidade são Uber, e 15% são Lyft.
- Seu pai acha que deixou o celular num carro Lyft, mas não tem certeza. De acordo com sua experiência, seu pai está correto 80% do tempo, e incorreto cerca de 20% do tempo.

Ele quer recuperar o aparelho. Para qual empresa ele deveria telefonar primeiro? Ou seja, o que é mais provável: que ele tenha deixado o telefone num Uber ou num Lyft?

Este problema é um clássico em probabilidade condicional, ferramenta especialmente útil em campos como Direito e Medicina. Por que a matemática de probabilidade condicional é tão importante? “Os seres humanos não evoluíram para resolver esses tipos de problemas”, explica Nick McKweown, professor de Ciência da Computação em Stanford. “Precisamos do rigor da matemática para nos salvarmos de nós mesmos”. Vejamos o porquê.

Nossa intuição inicial

Nossa intuição inicial é – ligar para a Lyft. Seu pai acha que deixou o celular em um carro Lyft, e sua memória é geralmente boa pra coisas desse tipo: 80% precisa.

Esta é nossa intuição inicial, mas ela, na verdade, está incorreta. A probabilidade de o telefone estar num carro Uber é bem maior! Mas como isso é possível?

Resolvendo com uma fórmula

Usando uma fórmula para a probabilidade condicional, descobrimos que as chances de o telefone estar em um carro Lyft são de apenas 41%. Portanto, é mais provável que ele esteja em um Uber. A matemática nos salvou! Nossa intuição foi corrigida.

No entanto, o problema é que é difícil acreditar nesses 41%, pois seu pai está certo 80% do tempo. Como é que isso pode fazer sentido? Será que erramos em algum lugar? É aqui que os recursos visuais podem nos ajudar com a matemática!

Uber/Lyft

Resolvendo visualmente com formas concretas.

Uma forma de visualizar isso é por meio de pequenos carros de verdade.

Aqui estão eles: 100 carros; 85 deles são Uber, 15 são Lyft.



Seu pai é 80% confiável. Vamos deixar Uber e Lyft de lado por um instante. Como podemos desenhar “80%” confiável? Uma forma é – vamos desenhar 80 carros cinza e 20 carros cinza-claros. Um desses carros contém um telefone, mas não sabemos qual. Se o seu pai supor que está no “cinza escuro”, ele estará 80% do tempo correto caso repetíssemos isso e colocássemos o telefone num carro diferente a cada vez. Dessa vez, sombreamos os carros por fileira.



Agora, podemos combinar essas duas ideias. Uma cor escura significa que seu pai escolheu corretamente, e uma cor mais clara significa que ele errou na escolha.



Vamos agora resolver nosso problema. Se o seu pai acha que deixou o telefone num carro Lyft, qual a probabilidade de o parêntese de fato estar dentro de um deles? Nesse caso, a situação é: Lyft/Correto ou Uber/Incorreto. A chance de o transporte ser Lyft/Correto é a proporção de carros Lyft corretos em relação ao total de carros no diagrama, ou $12/(12 + 17)$, ou $12/29$. Cerca de 41%. Então, apesar de ele achar que deixou o telefone num carro Lyft, a probabilidade de ele estar num carro Uber é maior. Ele deveria ligar para a Uber primeiro.



Podemos agora ver o que está acontecendo. Seu pai é 80% preciso, mas esta é sua média geral, que inclui quando ele pensa que o carro é um Uber. Sua precisão nesse caso (quando ele pensa que o carro é um Uber) deve ser mais alta, e nós podemos confirmar que isso é verdade porque: $68/(68+3) = 96\%$



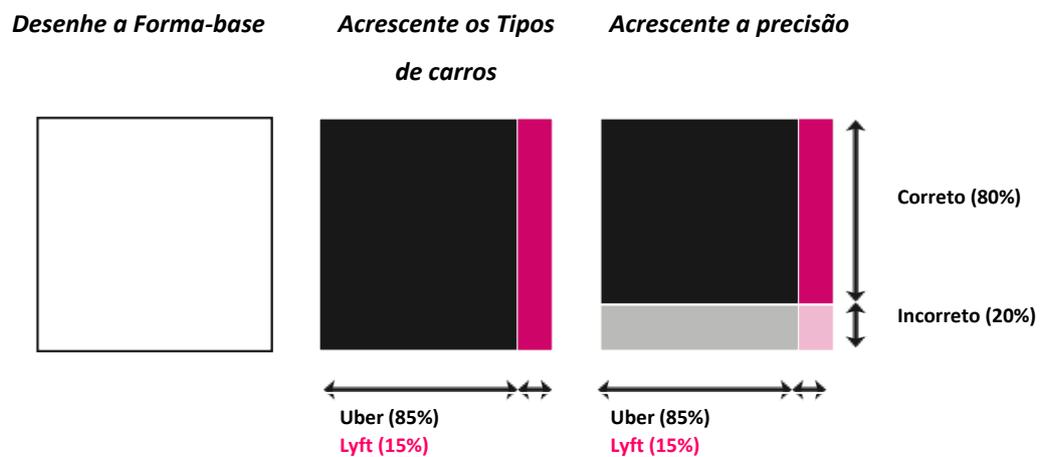
Nós agora temos a oportunidade de entender ainda mais sobre esse problema de maneiras que seriam muito difíceis com uma fórmula. O que aconteceria, por exemplo, se houvesse três diferentes opções de serviço de transporte privado de passageiros na sua cidade? Como isso mudaria o problema?



Uber/Lyft

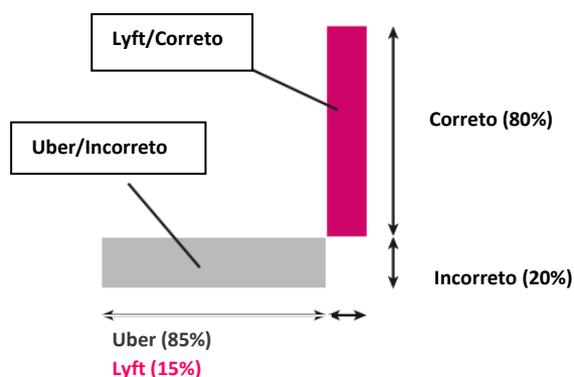
Como resolver problemas usando retângulos

O uso de retângulos oferece outra maneira de visualizar esse problema do Uber/Lyft. A ideia básica é a mesma da solução do ícone, na página anterior, mas ela traz um nível adicional de abstração.



Agora, nós podemos resolver nosso problema. Se o seu pai acha que deixou o celular em um carro Lyft, qual a probabilidade de o telefone estar, de fato, em um carro Lyft?

Seu pai falou Lyft, e pode estar certo ou errado, obviamente. As regiões relevantes desse diagrama são Lyft/Correto e Uber/Incorreto. A probabilidade de ser Lyft/Correto é a área do retângulo cor de rosa dividida pela área de ambos os triângulos



Nosso cálculo é:

$$\begin{aligned} \text{Rosa}/(\text{rosa} + \text{cinza}) &= \\ (15-80)/(15 \times 80 + 85 \times 20) &= \\ 1200/(1200 + 1700) &= \\ 1200/2900 &= \\ 0.4138 \end{aligned}$$

E terminamos! A probabilidade de o seu pai ter deixado o celular em um Lyft é de 41%. Então, ele deve ligar para a Uber primeiro.

Problema fornecido por Gary Antonick: <http://wordplay.blogs.nytimes.com/tag/visualthinking>

REALIZADOR



APOIADOR

